Решения задач первого тура олимпиады «Формула Единства/Третье тысячелетие» – 2013

9 класс

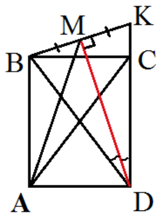
Задача 1

1. ***В стопке лежат одинаковые карточки, на которых записаны числа от 1 до 33. Билл взял одну карточку и тайно отметил на ней 10 чисел. Марк может сделать то же самое с несколькими карточками. Затем карточки открывают. Если на одной из карточек Марка хотя бы три из десяти отмеченных чисел совпадут с числами Билла, то Марк выигрывает. Какое наименьшее число карточек должен взять Марк и как их заполнить, чтобы наверняка выиграть?***

Решение.
Для 9 класса. Достаточно взять три карточки и на одной отметить числа от 1 до 10, на второй — от 11 до 20, на третьей — от 21 до 30. Если предположить, что карточка Марка совпадает с каждой из карточек Билла не более чем по двум числам, то на карточке Марка отмечены не больше двух из чисел от 1 до 10, не больше двух из чисел от 11 до 20 и не больше двух из чисел от 21 до 30, а также не больше трёх из чисел 31, 32, 33. Итого максимум 2+2+2+3=9 чисел, что меньше 10.
Двух карточек недостаточно: на них Билл может отметить максимум 20 разных чисел, но тогда на карточке Марка могут оказаться 10 чисел, ни одно из которых не отмечено Биллом.

Задача 2

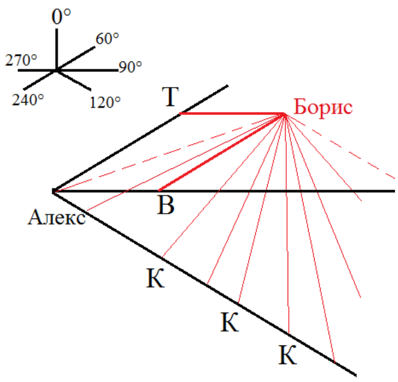
2. ***Дан прямоугольник ABCD. На луче DC отложен отрезок DK, равный BD. Точка M — середина отрезка BK. Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.***



Решение. Поскольку BD=DK, то медиана DM треугольника BDK является также высотой и биссектрисой, то есть $\angle$BMD =90° и $\angle$BDM=$\angle$BDC/2.
Теперь рассмотрим четырехугольник ABMD. В нем $\angle$BAD=$\angle$BMD=90°, то есть он вписанный. Следовательно, $\angle$BAM=$\angle$BDM=$\angle$BDC/2=$\angle$BAC/2, то есть AM — биссектриса.
Другое решение. Вновь заметим (как в первом решении), что DM — биссектриса $\angle$BDC. Пусть E и F — середины AD и BC. Тогда точка M лежит на EF (например, потому, что MC=BK/2=BM как медиана к гипотенузе, а значит, перпендикуляр из E проходит через середину BC). При симметрии относительно прямой EF $\angle$BDC переходит в $\angle$BAC, а DM — в AM. Поэтому AM — биссектриса $\angle$BAC.

Задача 3

3. ***Назовём основание системы счисления комфортным, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из её цифр. Например, 3 — комфортное основание, так как троичное число 102 — простое. Найдите все комфортные основания, не превосходящие 10.***



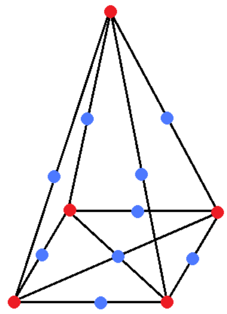
Решение.
Пусть K — искомое основание. Тогда в этой системе счисления действуют признаки делимости на K−1 и его делители, частным случаем которых являются признаки делимости на 9 и 3 в десятичной системе счисления. Чтобы применить их, нужно заменить число суммой его цифр.
Для искомого простого числа в качестве суммы цифр получим сумму целых чисел от 0 до K−1. Она равна $(K-1)K/2$. Если K чётно, то сумма цифр делится на K−1. Если K нечётно, то сумма цифр делится на $(K-1)/2$. Здесь важно не упустить особые случаи: если K=2, то $K-1=1$, а если K=3, то $(K-1)/2=1$. Но при больших K число не сможет оказаться простым, так как будет делиться либо на K−1, либо на $(K-1)/2$.

Ответ: комфортными основаниями являются только 2 и 3.

Задача 4

4. ***На плоскости нарисовали 5 красных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Все середины отрезков между ними отметили синим цветом. Расположите красные точки так, чтобы синих точек было минимально возможное количество.***

Решение. Прежде всего, синих точек не может быть больше $5\cdot 4/2=10$. Это число может уменьшиться за счёт совпадения каких-либо двух середин. Легко (см. рисунок) привести пример такого совпадения, когда синих точек 9. Покажем, что дальнейшее уменьшение невозможно.

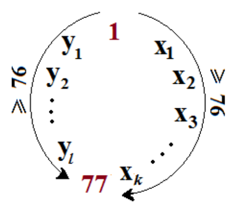


Так как никакие три красные точки не лежат на одной прямой, то совпадение каких-либо двух середин означает, что четыре красные точки (лежащие на концах выбранной пары отрезков) образуют параллелограмм. Так как оставшаяся точка не лежит ни на одной из сторон этого параллелограмма, то ни один из лучей, направленных из оставшейся точки в вершины параллелограмма, не параллелен ни одной из сторон параллелограмма.
Допустим, что удалось построить второй аналогичный параллелограмм. Тогда его образовали бы оставшаяся точка и какие-то три из ранее использованных. Так как у параллелограмма только две диагонали, то все три отрезка, попарно соединяющие три ранее использованных точки, не могут одновременно быть диагоналями.
Следовательно, у двух параллелограммов есть общая сторона, а противоположные ей стороны обоих параллелограммов параллельны между собой. Но это противоречит ранее сделанному выводу.
Итак, минимально возможное количество синих точек — 9.

Задача 5

5. ***По кругу в каком-то порядке выписаны числа от 1 до 99. Какова минимально возможная сумма модулей разностей между соседними числами?***

Ответ. 196
Решение (для 77 чисел). Заметим, что где-то в круге стоят числа 1 и 77. Рассмотрим «путь» от 1 до 77 по часовой стрелке: 1, x_1, x_2, …, x_k, 77. Заметим, что при прождении по этому пути число изменяется на 76, поэтому сумма модулей разностей не меньше 76 (формально: $|77-x_k| + |x_k-x_{k-1}| + \ldots + |x_2-x_1| + |x_1-1| >= |77-1| = 76$).
Теперь рассмотрим путь между числами 1 и 77 «с другой стороны» (против часовой стрелки); сумма модулей разностей, стоящих там, также не меньше 76. Поэтому общая сумма модулей разностей не меньше 152.
Результат 152 достигается (например, при расстановке чисел по порядку).



Задача 6

6. ***Решите систему уравнений:***

$$\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$$

Решение.

Введем обозначения: $m=x+y, n=xy.$ Тогда система примет вид: $\begin{cases} m+n=11 \\ mn=30 \end{cases}.$

Эта вспомогательная система имеет два решения: (1) $\begin{cases} m=6 \\ n=5 \end{cases}$ и (2) $\begin{cases} m=5 \\ n=6 \end{cases}$

(их можно найти, например, по теореме Виета: это корни уравнения $t^2-11t+30=0$).
Вернувшись к исходным переменным, имеем:

(1) $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases}$ и (2) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}.$

Решая полученные системы (можно снова воспользоваться теоремой Виета), получаем для каждой из них по 2 решения:

(1) $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}.$

Итак, исходная система имеет ровно 4 решения: (1;5), (5;1), (2;3), (3;2).