Решения задач первого тура олимпиады
«Формула Единства/Третье тысячелетие» – 2013

8 класс

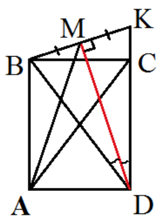
Задача 1

1. ***В стопке лежат одинаковые карточки, на которых записаны числа от от 1 до 12. Билл взял одну карточку и тайно отметил на ней 4 числа. Марк может сделать то же самое с несколькими карточками. Затем карточки открывают. Если на одной из карточек Марка хотя бы два из четырёх отмеченных чисел совпадут с числами Билла, то Марк выигрывает. Какое наименьшее число карточек должен взять Марк и как их заполнить, чтобы наверняка выиграть?***

Для 8 класса. Достаточно взять три карточки и на одной отметить 1,2,3,4, на второй — 5,6,7,8, на третьей — 9,10,11,12. Если предположить, что карточка Марка совпадает с каждой из карточек Билла не более чем по одному числу, то на карточке Марка отмечены не больше одного из чисел от 1 до 4, не больше одного из чисел от 5 до 8 и не больше одного из чисел от 9 до 12, то есть максимум три числа.
Двух карточек недостаточно: на них Билл может отметить максимум 8 разных чисел, но тогда на карточке Марка могут оказаться 4 числа, ни одно из которых не отмечено Биллом.

Задача 2

2. ***Дан прямоугольник ABCD. На луче DC отложен отрезок DK, равный BD. Точка M — середина отрезка BK. Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.***



Решение. Поскольку BD=DK, то медиана DM треугольника BDK является также высотой и биссектрисой, то есть$\angle BMD=90°$ и $\angle BDM=\angle BDC/2$.
Теперь рассмотрим четырехугольник ABMD. В нем $\angle BAD=\angle BMD=90°$, то есть он вписанный. Следовательно, $\angle BAM=\angle BDM=\angle BDC/2=\angle BAC/2$, то есть AM — биссектриса.
Другое решение. Вновь заметим (как в первом решении), что DM — биссектриса $\angle BDC$. Пусть E и F — середины AD и BC. Тогда точка M лежит на EF (например, потому, что MC=BK/2=BM как медиана к гипотенузе, а значит, перпендикуляр из E проходит через середину BC). При симметрии относительно прямой EF $\angle BDC$ переходит в $\angle BAC$, а DM — в AM. Поэтому AM — биссектриса $\angle BAC$.

Задача 3

3. ***У фокусника есть два комплекта по 8 карточек. На розовых карточках записаны целые числа от 0 7. На первой голубой карточке написано 1, а число на каждой следующей голубой карточке в 8 раз больше предыдущего. Фокусник раскладывает карточки попарно (розовую с голубой). Затем зрители перемножают числа в каждой паре и находят сумму всех 8 произведений. Фокус состоит в том, что в сумме должно получиться простое число. Подскажите фокуснику, какие карточки можно для этого объединить в пары (или докажите, что у него ничего не получится).***

Ответ: фокус не получится.
Доказательство. Рассмотрим остатки от деления на 7. Так как 8 даёт при делении на 7 остаток 1, то и любая степень 8 тоже даст при делении на 7 остаток 1. Значит, вклад любой голубой карточки в остаток от деления суммы на 7 соответствует 1. Теперь удобно переставить слагаемые так, чтобы числа на розовых карточках шли в порядке возрастания. Получим сумму целых чисел от 0 до 7. Она делится на 7. Значит, как бы фокусник ни комбинировал карточки в пары, сумма всех 8 произведений всегда будет делиться на 7. Следовательно, она никогда не сможет оказаться простым числом.

Задача 4

4. ***На плоскости нарисовали 5 красных точек. Все середины отрезков между ними отметили синим цветом. Расположите красные точки так, чтобы синих точек было минимально возможное количество. (Точка может оказаться красной и синей одновременно.)***

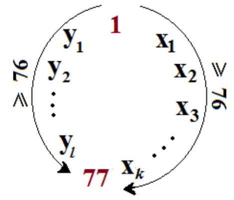
Решение. Пусть точки расположены на прямой на равных расстояниях друг от друга. Например, пусть это точки координатной оси с координатами 1, 2, 3, 4 и 5. Тогда середина каждого отрезка с концами в этих точках — одна из точек 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, то есть имеем 7 синих точек.
Меньшего количества синих точек быть не может. В самом деле, введём на плоскости систему координат так, чтобы никакие две красные точки не оказались на одной вертикальной прямой. Пусть эти точки (слева направо) — A, B, C, D, E.
Заметим, что если один из концов отрезка сдвинуть вправо, то и середина отрезка сдвинется вправо (а если двигать концы отрезков по вертикали, то горизонтальная координата середины не изменится). Поэтому середина отрезка AC правее, чем середина AB; середина AD ещё правее; далее вправо идут середина AD, середина AE, середина BE, середина CE и середина DE. Таким образом, все эти семь середин различны (поскольку каждая из них правее предыдущей).

Задача 5

5. ***По кругу в каком-то порядке выписаны числа от 1 до 88. Какова минимально возможная сумма модулей разностей между соседними числами?***

Ответ. 174

Решение (для 77 чисел). Заметим, что где-то в круге стоят числа 1 и 77. Рассмотрим «путь» от 1 до 77 по часовой стрелке: 1, x_1, x_2, …, x_k, 77. Заметим, что при прождении по этому пути число изменяется на 76, поэтому сумма модулей разностей не меньше 76 (формально: $|77-x_k| + |x_k-x_{k-1}| + \ldots + |x_2-x_1| + |x_1-1| >= |77-1| = 76$).



Теперь рассмотрим путь между числами 1 и 77 «с другой стороны» (против часовой стрелки); сумма модулей разностей, стоящих там, также не меньше 76. Поэтому общая сумма модулей разностей не меньше 152.

Результат 152 достигается (например, при расстановке чисел по порядку).

Задача 6

6. ***На продажу выставлены 20 книг по цене от 7 до 10 евро и 20 обложек по цене от 10 центов до 1 евро, причём все цены — разные. Смогут ли Том и Леопольд купить по книге с обложкой, заплатив одну и ту же сумму денег?***

Решение. Из 20 книг и 20 обложек можно составить 20·20=400 разных комплектов «книга+обложка». Стоимость любого комплекта не меньше, чем 7 евро 10 центов, так как самая дешёвая книга стоит не меньше 7 евро, а самая дешёвая обложка — не меньше 10 центов. По аналогичной причине стоимость любого комплекта не больше 11 евро.

Стоимость комплекта может принимать, таким образом, одно из 391 значения (от 7 евро 10 центов до 11 евро существует ровно 391 значение денежной суммы в европейской валюте). Поскольку 400 больше, чем 391, у каких-то двух комплектов «книга + обложка» стоимость окажется одинаковой.

Так не может случиться, что в этих двух комплектах книга будет одной и той же. (Если бы это случилось, стоимость обложки оказалась бы в двух комплектах одной и той же, иначе не получится одинаковой стоимость комплектов. Но если стоимость обложек в двух комплектах одинакова, то сами обложки одинаковы, то есть это один и тот же комплект.) Точно так же получается, что в этих комплектах обложка не может быть одной и той же. Поскольку и книги, и обложки в этих двух комплектах разные, Том и Леопольд смогут эти комплекты приобрести.