Решения задач первого тура олимпиады
«Формула Единства/Третье тысячелетие» – 2013

6 класс

Задача 1

1. ***Назовём год лихим, если в записи его номера есть одинаковые цифры. Например, все годы с 1988 по 2012 были лихими. Каково максимальное количество лихих лет, идущих подряд, среди уже прошедших лет нашей эры?***

Решение. Заметим, что все годы с 1099 по 1202 — лихие (1099 содержит две девятки, числа с 1100 по 1199 — две единицы, 1200 — два нуля, 1201 — две единицы, 1202 — две двойки). При этом 1098 и 1203 — не лихие. Таким образом, имеем 104 подряд идущих лихих года.

Заметим, что в других местах лихие годы идут группами менее чем по 100 (например, потому, что 90, 190, 290, 390, 490, 590, 690, 790, 890, 987, 1087, 1230, 1320, 1420, 1520, 1620, 1720, 1820, 1920, 1980 — не лихие). Итак, 104 — максимальная количество подряд идущих лихих лет.

Задача 2

2. ***На круглом торте стоит 7 свечей. Тремя разрезами торт разрезали на части, причём в каждой части оказалась ровно одна свеча. Сколько частей было после второго разреза и сколько свечей стояло в каждой из них?***

Решение. Очевидно, количество частей после второго разреза не превосходит четырёх (первый разрез даёт две части, второй делит каждую из них не более чем на два куска).

Заметим, что после второго разреза ни в одном из кусков не могло оказаться три и более свечей, иначе третьего разреза не хватило бы, чтобы все эти свечи оказались в разных частях. Итак, в каждом куске не больше двух свечей.

Тогда должно быть хотя бы четыре куска (иначе в сумме свечей не больше шести), а больше четырёх быть не может. Для четырёх кусков единственный вариант получить 7 свечей — это 2+2+2+1.

Задача 3

3. ***Даны три нечётных положительных числа p, q, r. Про них известно, что p>2q, q>2r, r>p−2q. Докажите, что p+q+r≥25.***

Решение. Заметим, что если $p>2q$, то $p-2q\geq1$. Поскольку $r>p-2q$, то $r>1$. Значит, r — нечётное число, большее 1, то есть $r\geq3$. Тогда $q>2r\geq6$, то есть $q\geq7$; $p>2q\geq14$, то есть $p\geq15$. Итого $p+q+r\geq15+7+3=25$.

Задача 4

4. ***У Кости есть шесть кубиков, каждая грань каждого кубика раскрашена в один из шести цветов. Все кубики раскрашены одинаково. Костя составил из кубиков столбик и смотрит на него с четырёх сторон. Может ли он сделать это таким образом, чтобы с каждой стороны все шесть граней были разного цвета?***

Решение. Будем обозначать цвета числами от 1 до 6. Пусть у каждого кубика на двух противоположных гранях находятся цвета 5 и 6, а на остальных — 1, 2, 3 и 4 (именно в этом порядке по кругу).Тогда кубик можно ставить так, чтобы на четырёх видимых гранях (по кругу) оказывались цвета: а) 1234; б) 1536; в) 2546 (и в обратном порядке). Пример такого расположения показан на рисунке.

Задача 5

5. ***В одном доме провели перепись населения. Выяснилось, что в каждой квартире живет супружеская пара (мать и отец) и в каждой семье есть хотя бы один ребенок. У каждого мальчика в доме есть сестра, но всего мальчиков больше, чем девочек. Детей же в доме меньше, чем взрослых. Докажите, что в результаты переписи вкралась ошибка.***

Решение. Во-первых, заметим, что в каждой семье есть хотя бы одна девочка (поскольку у любого мальчика есть сестра). Тогда девочек хотя бы столько сколько супружеских пар, а мальчиков больше, чем супружеских пар. Складывая все вместе, получаем, что детей больше чем взрослых.

Задача 6

6. ***На продажу выставлены 20 книг по цене от 7 до 10 евро и 20 обложек по цене от 10 центов до 1 евро, причём все цены — разные. Смогут ли Том и Леопольд купить по книге с обложкой, заплатив одну и ту же сумму денег?***

Решение. Из 20 книг и 20 обложек можно составить $20 \cdot 20 = 400$ разных комплектов «книга+обложка». Стоимость любого комплекта не меньше, чем 7 евро 10 центов, так как самая дешёвая книга стоит не меньше 7 евро, а самая дешёвая обложка — не меньше 10 центов. По аналогичной причине стоимость любого комплекта не больше 11 евро.

Стоимость комплекта может принимать, таким образом, одно из 391 значения (от 7 евро 10 центов до 11 евро существует ровно 391 значение денежной суммы в европейской валюте). Поскольку 400 больше, чем 391, у каких-то двух комплектов «книга + обложка» стоимость окажется одинаковой.

Так не может случиться, что в этих двух комплектах книга будет одной и той же. (Если бы это случилось, стоимость обложки оказалась бы в двух комплектах одной и той же, иначе не получится одинаковой стоимость комплектов. Но если стоимость обложек в двух комплектах одинакова, то сами обложки одинаковы, то есть это один и тот же комплект.) Точно так же получается, что в этих комплектах обложка не может быть одной и той же.

Поскольку и книги, и обложки в этих двух комплектах разные, Том и Леопольд смогут эти комплекты приобрести.