Решения задач первого тура олимпиады
«Формула Единства/Третье тысячелетие» – 2013

5 класс

Задача 1

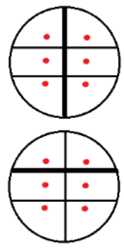
1. ***Назовём год лихим, если в записи его номера есть одинаковые цифры. Например, все годы с 1988 по 2012 были лихими. Каково максимальное количество лихих лет, идущих подряд, среди уже прошедших лет нашей эры?***

Решение. Заметим, что все годы с 1099 по 1202 — лихие (1099 содержит две девятки, числа с 1100 по 1199 — две единицы, 1200 — два нуля, 1201 — две единицы, 1202 — две двойки). При этом 1098 и 1203 — не лихие. Таким образом, имеем 104 подряд идущих лихих года.

Заметим, что в других местах лихие годы идут группами менее чем по 100 (например, потому, что 90, 190, 290, 390, 490, 590, 690, 790, 890, 987, 1087, 1230, 1320, 1420, 1520, 1620, 1720, 1820, 1920, 1980 — не лихие). Итак, 104 — максимальное количество подряд идущих лихих лет.

Задача 2

2. ***На круглом торте стоит 6 свечей. Тремя разрезами торт разрезали на части, причём в каждой части оказалась ровно одна свеча. Сколько свечей могло стоять в каждой из частей, которые образовались после первого разреза? Объясните, почему никакие другие варианты невозможны.***



Решение. Возможны два варианта: а) в обеих частях по три свечи (3+3); б) в одной части две свечи, в другой — четыре (2+4). Примеры см. на рисунках, первый разрез показан жирной линией.

Остальные варианты (1+5 или 0+6) невозможны. Действительно, пусть после первого разреза в какой-то части осталось хотя бы пять свечей. Тогда вторым разрезом она будет разрезана максимум на две части, поэтому в какой-то из них будет хотя бы три свечи. Третьим разрезом нельзя сделать так, чтобы каждая из этих свечей оказалась в отдельном куске.

Задача 3

3. ***Даны три нечётных положительных числа p, q, r. Про них известно, что $p>2q$, $q>2r$, $r>p-2q$. Докажите, что $p+q+r\geq 25$.***

Решение. Заметим, что если $p>2q$, то $p-2q\geq 1$. Поскольку $r>p-2q$, то $r>1$. Значит, r — нечётное число, большее 1, то есть $r\geq 3$. Тогда $q>2r\geq 6$, то есть $q\geq 7$; $p>2q\geq 14$, то есть $p\geq 15$. Итого $p+q+r\geq 15+7+3=25$.

Задача 4

4. ***У Кости есть шесть кубиков, каждая грань каждого кубика раскрашена в один из шести цветов. Все кубики раскрашены одинаково. Костя составил из кубиков столбик и смотрит на него с четырёх сторон. Может ли он сделать это таким образом, чтобы с каждой стороны все шесть граней были разного цвета?***

Решение. Будем обозначать цвета числами от 1 до 6. Пусть у каждого кубика на двух противоположных гранях находятся цвета 5 и 6, а на остальных — 1, 2, 3 и 4 (именно в этом порядке по кругу).Тогда кубик можно ставить так, чтобы на четырёх видимых гранях (по кругу) оказывались цвета: а) 1234; б) 1536; в) 2546 (и в обратном порядке).

Пример такого расположения показан на рисунке.

Задача 5

5. ***В одном доме провели перепись населения. Выяснилось, что в каждой квартире живет супружеская пара (мать и отец) и в каждой семье есть хотя бы один ребенок. У каждого мальчика в доме есть сестра, но всего мальчиков больше, чем девочек. Детей же в доме меньше, чем взрослых. Докажите, что в результаты переписи вкралась ошибка.***

Решение. Во-первых, заметим, что в каждой семье есть хотя бы одна девочка (поскольку у любого мальчика есть сестра). Тогда девочек хотя бы столько сколько супружеских пар, а мальчиков больше, чем супружеских пар. Складывая все вместе, получаем, что детей больше чем взрослых.

Задача 6

6. ***Фокусник хочет сложить колоду из 36 карт так, чтобы у любых двух подряд идущих карт совпадало либо достоинство, либо масть. При этом начать он хочет с пиковой дамы, а закончить бубновым тузом.***
Как это сделать?

Решение. Вариантов очень много, один из них показан на рисунке.

	6	7	8	9	10	В	Д	К	Т
пики	6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	В♠	Д♠	К♠	Т♠
трефы	6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	В♣	Д♣	К♣	Т♣
черви	6♥	7♥	8♥	9♥	10♥	В♥	Д♥	К♥	Т♥
бубны	6♦	7♦	8♦	9♦	10♦	В♦	Д♦	К♦	Т♦