Решения задач первого тура олимпиады
«Формула Единства/Третье тысячелетие» – 2013

11 класс

Задача 1

1. ***Назовём год лихим, если в записи его номера есть одинаковые цифры. Например, все годы с 1988 по 2012 были лихими. Докажите, что в каждом столетии, начиная с двадцать первого, хотя бы 44 лихих года.***

Решение. Будем для удобства считать, что столетие начинается с года ...xy00 и кончается годом ...xy99 (возможно, вместо многоточия ничего нет). На самом деле более правильно считать, что столетие начинается с года ...xy01 и кончается годом ...uv00; но поскольку годы ...xy00 и ...uv00 оба лихие, то это не влияет на количество лихих лет в столетии.
Заметим, что при x=y все сто лет лихие. Поэтому будем считать, что x≠y.
В таком случае к лихим годам относятся следующие:

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
2030	2031	2032	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039
2040	2041	2042	2043	2044	2045	2046	2047	2048	2049
2050	2051	2052	2053	2054	2055	2056	2057	2058	2059
2060	2061	2062	2063	2064	2065	2066	2067	2068	2069
2070	2071	2072	2073	2074	2075	2076	2077	2078	2079
2080	2081	2082	2083	2084	2085	2086	2087	2088	2089
2090	2091	2092	2093	2094	2095	2096	2097	2098	2099

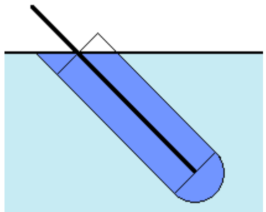
...xyxx, ...xyyy, ...xyxy, ...xyyx;
...xyax, где a отлично от x и y (8 штук);
...xyxa, где a отлично от x и y (8 штук);
...xyya, где a отлично от x и y (8 штук);
...xyay, где a отлично от x и y (8 штук);
...xyaa, где a отлично от x и y (8 штук).
Легко убедиться, что все перечисленные годы различны, и их количество равно 44.

Лихие годы в XXI столетии показаны в таблице, аналогично выглядят таблицы и для других столетий при x≠y.

Задача 2

2. ***Для исследования подводного мира соорудили прямолинейную штангу, уходящую под углом 45° к поверхности воды на глубину 100 метров. Водолаз связан со штангой гибким тросом, позволяющим ему удаляться от любой точки штанги на расстояние не более 10 метров. Считая размеры водолаза нулевыми (точечными), найдите объём доступной ему части подводного пространства. Дайте точный ответ и округлите его до ближайшего целого значения в кубических метрах.***

Решение. Начнём с того, что на глубину 100 метров под углом 45° заходит штанга длиной $H=100\sqrt{2}$ метров. Объём цилиндра такой высоты с радиусом основания 10 метров: $\pi r^2 H=10000\pi\sqrt{2}$ кубическим метрам. Водолазу доступна любая точка внутри этого цилиндра, за исключением его надводной части. Но эта надводная часть компенсируется равной подводной областью, примыкающей к цилиндру чуть выше его. Наконец, от нижнего конца штанги водолазу доступна лежащая вне цилиндра область в форме полушара радиусом 10 метров, объём которой равен $4000\pi/3$. Таким образом, объём доступной водолазу части подводного пространства равен $1000\pi(10\sqrt{2}+4/3) \approx 48617{,}6$ кубических метров. Округление до ближайшего целого значения в кубических метрах — **48618**.



Задача 3

3. ***Назовём основание системы счисления комфортным, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из её цифр. Например, 3 — комфортное основание, так как троичное число 102 — простое. Найдите все комфортные основания.***

Решение.
Пусть K — искомое основание. Тогда в этой системе счисления действуют признаки делимости на K−1 и его делители, частным случаем которых являются признаки делимости на 9 и 3 в десятичной системе счисления. Чтобы применить их, нужно заменить число суммой его цифр.
Для искомого простого числа в качестве суммы цифр получим сумму целых чисел от 0 до K−1. Она равна $(K-1)K/2$. Если K чётно, то сумма цифр делится на K−1. Если K нечётно, то сумма цифр делится на $(K-1)/2$. Здесь важно не упустить особые случаи: если K=2, то $K-1=1$, а если K=3, то $(K-1)/2=1$. Но при больших K число не сможет оказаться простым, так как будет делиться либо на K−1, либо на $(K-1)/2$.

Ответ: комфортными основаниями являются только 2 и 3.

Задача 4

4. ***У Кости есть n одинаковых кубиков. У каждого кубика на двух противоположных гранях написаны числа 5 и 6, а на остальных — 1, 2, 3 и 4 (именно в этом порядке по кругу).Он склеил из этих кубиков столбик — параллелепипед 1×1×n — и покрыл лаком все шесть граней этого столбика. После этого он расклеил кубики и обнаружил, что сумма чисел на покрытых лаком гранях меньше, чем на остальных. При каком***

наименьшем n такое могло произойти?

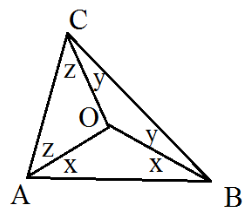
Решение. Заметим, что на каждом из двух крайних кубиков сумма цифр, покрытых лаком, не меньше 15 (1+2+3+4+5), а на каждом из остальных — не меньше 10 (1+2+3+4). Общая же сумма цифр на каждом кубике равна 21.
Обозначим число кубиков через n, тогда минимальная сумма чисел на лакированных гранях равна 15·2+10·(n−2). По условию, эта величина меньше половины общей суммы, то есть меньше 21n/2.
Итак, 15·2+10·(n−2)<21n/2; преобразуем:
10n+10<10,5n, то есть 10<0,5n, или n>20.
Значит, минимально допустимое количество кубиков равно 21. Легко убедиться, что в этом случае описанная ситуация возможна (если на крайних кубиках сумма лакированных чисел по 15, а на остальных — по 10).

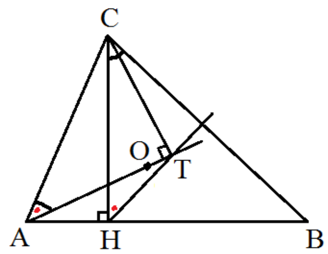
Задача 5

5. ***CH — высота в треугольнике ABC, а O — центр его описанной окружности. Из точки C опустили перпендикуляр на AO, а его основание обозначили через T. Наконец, через M обозначили точку пересечения HT и BC. Найдите отношение длин отрезков BM и CM.***

Решение.

1. Докажем сначала, что ∠CAO+∠ABC=90°. Заметим, что поскольку O — центр описанной окружности, то треугольники AOB, BOC, COA равнобедренные. Обозначим их углы при основании через x, y и z соответственно. Тогда получим: 2x+2y+2z=180° (общая сумма углов), а CAO+ABC=z+(x+y)=90°. Аналогично это доказывается и для случая, когда O лежит вне треугольника (или на его стороне).
2. Итак, мы доказали, что угол CAO равен 90°-∠ABC. Заметим, что и угол BCH равен 90°-∠ABC, поэтому ∠CAO=∠BCH (или, что то же самое, ∠CAT=∠BCH).
3. Теперь заметим, что четырехугольник CTHA — вписанный, поскольку ∠AHC=∠ATC=90°. Значит, ∠CAT=∠CHT (или, что то же самое, ∠CAT=∠BCM).
4. Объединяя всё вместе, получаем, что в треугольнике BCH равны углы BCH и CHM. Значит, CM=MH.
5. Далее стандартная картина для прямоугольного ΔBCH: ∠B=90°-∠BCH=90°-∠CHM=∠MHB, поэтому BM=MH.
6. Из двух последних пунктов следует, что BM=CM.





Ответ: эти длины равны.

Задача 6

6. ***Пусть $p_1,..., p_n$ — различные простые числа. Пусть S — сумма всевозможных произведений четного (ненулевого) количества различных простых из этого набора. Докажите, что S+1 делится на 2^{n-2}.***

Решение. Рассмотрим произведения $A=(1-p_1)(1-p_2)...(1-p_n)$ и $B=(1+p_1)(1+p_2)...(1+p_n)$. Заметим, что при раскрытии скобок все произведения с чётным (в том числе нулевым) количеством множителей войдут в них с плюсом, а произведения нечётного числа множителей — с разными знаками. Поэтому если эти два произведения сложить, то останутся только произведения чётного числа множителей, причём каждое появится дважды. Итак, $A+B = 2(S+1)$ (единица — это произведение нуля множителей, которое входит в A и B, но по определению не входит в S).
Заметим, что все числа $p_1,..., p_n$ различны, поэтому все они, кроме, быть может, одного (двойки) — нечётны. Поэтому в произведении $A=(1-p_1)(1-p_2)...(1-p_n)$ все множители, кроме, быть может, одного — чётные, и оно делится на 2^{n-1}. Аналогично и B делится на 2^{n-1}, поэтому $S+1=(A+B)/2$ делится на 2^{n-2}.