Решения задач первого тура олимпиады «Формула Единства/Третье тысячелетие» – 2013

10 класс

Задача 1

1. ***Назовём год лихим, если в записи его номера есть одинаковые цифры. Например, все годы с 1988 по 2012 были лихими. Докажите, что в каждом столетии, начиная с двадцать первого, хотя бы 44 лихих года.***

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
2030	2031	2032	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039
2040	2041	2042	2043	2044	2045	2046	2047	2048	2049
2050	2051	2052	2053	2054	2055	2056	2057	2058	2059
2060	2061	2062	2063	2064	2065	2066	2067	2068	2069
2070	2071	2072	2073	2074	2075	2076	2077	2078	2079
2080	2081	2082	2083	2084	2085	2086	2087	2088	2089
2090	2091	2092	2093	2094	2095	2096	2097	2098	2099

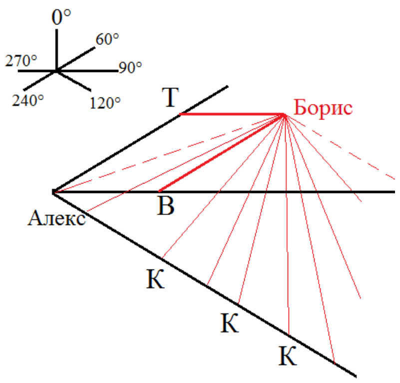
Решение. Будем для удобства считать, что столетие начинается с года ...xy00 и кончается годом ...xy99 (возможно, вместо многоточия ничего нет). На самом деле более правильно считать, что столетие начинается с года ...xy01 и кончается годом ...uv00; но поскольку годы ...xy00 и ...uv00 оба лихие, то это не влияет на количество лихих лет в столетии.
Заметим, что при $x=y$ все сто лет лихие. Поэтому будем считать, что $x\neq y$. В таком случае к лихим годам относятся следующие:

...xyxx, ...xyyy, ...xyxy, ...xyyx;
...xyax, где a отлично от x и y (8 штук);
...xyxa, где a отлично от x и y (8 штук);
...xyya, где a отлично от x и y (8 штук);
...xyay, где a отлично от x и y (8 штук);
...xyaa, где a отлично от x и y (8 штук).
Легко убедиться, что все перечисленные годы различны, и их количество равно 44.

Лихие годы в XXI столетии показаны в таблице, аналогично выглядят таблицы и для других столетий при $x\neq y$.

Задача 2

2. ***Азимутом называется угол от 0 до 360°, отсчитанный по часовой стрелке от направления на север до направления на нужный ориентир. Алекс видит телебашню под азимутом 60°, водонапорную башню под азимутом 90°, а колокольню под азимутом 120°. Для Бориса те же азимуты соответственно равны 270°, 240° и X. Какие значения может принимать X?***



Решение. Начнём с того, что азимут 90° — это направление с востока на запад, а 270° — с запада на восток. Отсюда следует, что Борис находится восточнее Алекса и (с учётом других данных из условия) севернее его. Следовательно, азимут от Бориса к Алексу не превышает 270°. X — ещё меньше, но в случае расположения Бориса и Алекса почти на одной параллели может быть сколь угодно близок к 270°.
Так как колокольня находится южнее (и восточнее) Алекса, то она южнее Бориса. Поэтому X не может быть меньше 120° (азимута на колокольню от Алекса). С увеличением расстояния до колокольни X может стать сколь угодно близким к 120°.
Ответ: от 120° до 270° (исключая крайние значения).

Задача 3

3. ***Назовём основание системы счисления комфортным, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из её цифр. Например, 3 — комфортное основание, так как троичное число 102 — простое. Найдите все комфортные основания, не превосходящие 12.***

Решение.
Пусть K — искомое основание. Тогда в этой системе счисления действуют признаки делимости на $K-1$ и его делители, частным случаем которых являются признаки делимости на 9 и 3 в десятичной системе счисления. Чтобы применить их, нужно заменить число суммой его цифр.
Для искомого простого числа в качестве суммы цифр получим сумму целых чисел от 0 до $K-1$. Она равна $(K-1)K/2$. Если K чётно, то сумма цифр делится на $K-1$. Если K нечётно, то сумма цифр делится на $(K-1)/2$. Здесь важно не упустить особые случаи: если $K=2$, то $K-1=1$, а если $K=3$, то $(K-1)/2=1$. Но при больших K число не сможет оказаться простым, так как будет делиться либо на $K-1$, либо на $(K-1)/2$.

Ответ: комфортными основаниями являются только 2 и 3.

Задача 4

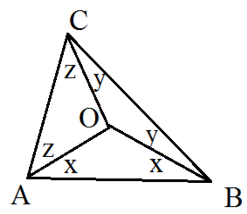
4. ***У Кости есть n одинаковых кубиков. У каждого кубика на двух противоположных гранях написаны числа 5 и 6, а на остальных — 1, 2, 3 и 4 (именно в этом порядке по кругу).Он склеил из этих кубиков столбик — параллелепипед 1×1×n — и покрыл лаком все шесть граней этого столбика. После этого он расклеил кубики и обнаружил, что сумма чисел на покрытых лаком гранях меньше, чем на остальных. При каком наименьшем n такое могло произойти?***

Решение. Заметим, что на каждом из двух крайних кубиков сумма цифр, покрытых лаком, не меньше 15 (1+2+3+4+5), а на каждом из остальных — не меньше 10 (1+2+3+4). Общая же сумма цифр на каждом кубике равна 21.
Обозначим число кубиков через n, тогда минимальная сумма чисел на лакированных гранях равна 15·2+10·(n−2). По условию, эта величина меньше половины общей суммы, то есть меньше 21n/2.
Итак, 15·2+10·(n−2)<21n/2; преобразуем:
10n+10<10,5n, то есть 10<0,5n, или n>20.
Значит, минимально допустимое количество кубиков равно 21. Легко убедиться, что в этом случае описанная ситуация возможна (если на крайних кубиках сумма лакированных чисел по 15, а на остальных — по 10).

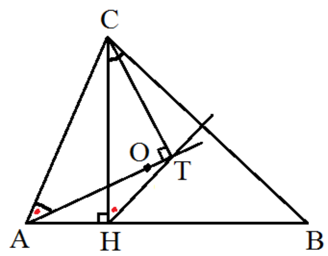
Задача 5

5. ***CH — высота в треугольнике ABC, а O — центр его описанной окружности. Из точки C опустили перпендикуляр на AO, а его основание обозначили через T. Наконец, через M обозначили точку пересечения HT и BC. Найдите отношение длин отрезков BM и CM.***

Решение.



1. Докажем сначала, что ∠CAO+∠ABC=90°. Заметим, что поскольку O — центр описанной окружности, то треугольники AOB, BOC, COA равнобедренные. Обозначим их углы при основании через x, y и z соответственно. Тогда получим: 2x+2y+2z=180° (общая сумма углов), а CAO+ABC=z+(x+y)=90°. Аналогично это доказывается и для случая, когда O лежит вне треугольника (или на его стороне).
2. Итак, мы доказали, что угол CAO равен 90°-∠ABC. Заметим, что и угол BCH равен 90°-∠ABC, поэтому ∠CAO=∠BCH (или, что то же самое, ∠CAT=∠BCH).
3. Теперь заметим, что четырехугольник CTHA — вписанный, поскольку ∠AHC=∠ATC=90°. Значит, ∠CAT=∠CHT (или, что то же самое, ∠CAT=∠BCM).
4. Объединяя всё вместе, получаем, что в треугольнике BCH равны углы BCH и CHM. Значит, CM=MH.
5. Далее стандартная картина для прямоугольного ∆BCH: ∠B=90°-∠BCH=90°-∠CHM=∠MHB, поэтому BM=MH.
6. Из двух последних пунктов следует, что BM=CM.



Ответ: эти длины равны.

Задача 6

6. ***Решите систему уравнений:***

$$\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$$

Решение.

Введем обозначения: $m=x+y, n=xy$. Тогда система примет вид: $\begin{cases} m+n=11 \\ mn=30 \end{cases}$.

Эта вспомогательная система имеет два решения: (1) $\begin{cases} m=6 \\ n=5 \end{cases}$ и (2) $\begin{cases} m=5 \\ n=6 \end{cases}$

(их можно найти, например, по теореме Виета: это корни уравнения *$t^2-11t+30=0$).*
Вернувшись к исходным переменным, имеем:

(1) $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases}$ и (2) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$.

Решая полученные системы (можно снова воспользоваться теоремой Виета), получаем для каждой из них по 2 решения:

(1) $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

Итак, исходная система имеет ровно 4 решения: (1;5), (5;1), (2;3), (3;2).