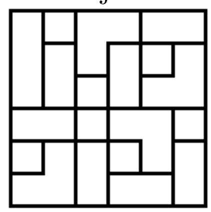
Olimpiada Matemática Internacional
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"

Curso 2017/2018. Primera Fase

Problemas Nivel R5

1. Muestre cómo cortar este cuadrado en 4 partes iguales, en forma y tamaño, si solo está permitido cortar a lo largo de las líneas dibujadas en la figura.



2. ¿Habrá dos enteros positivos diferentes a y b tales que a es divisible para b, $a+1$ es divisible para $b+1$, y $a+2$ es divisible para $b+2$?

3. Hay autos azules, buses azules, barcos azules y trenes verdes en una juguetería. Daniel ha comprado varios juguetes y ha notado que la mitad de sus juguetes azules son autos, y que la mitad de sus juguetes de transportación terrestre son buses. ¿Cuántos barcos compró Daniel?

4. Andrés estaba solo en casa, pero oyendo atentamente el sonido de las gotas de agua cayendo desde el grifo a intervalos regulares. 48 minutos pasaron entre el sonido de la primera y última gota, y hubo un intervalo de 44 minutos entre la quinta y última gota. ¿Cuántas gotas oyó Andrés?

5. Un entero positivo es llamado *bueno* si todos sus dígitos se repiten al menos dos veces (por ejemplo, 1522521 es bueno, pero 1522522 no). ¿Cuántos números buenos de tres cifras hay, que no contengan al cero?

6. Una página de papel 210 mm×300 mm se corta en varios rectángulos iguales con el ancho dos veces más grande que su longitud. ¿Cuál es el área máxima de uno de esos rectángulos? No se olvide de demostrar su respuesta.

7. Todas las criaturas vivientes de Pandora pueden ser divididas en caballeros (siempre dicen la verdad), mendaces (siempre mienten) y animales (no dicen nada). Un día, cada uno de los siete habitantes de Pandora (A, B, C, D, E, F y G) dijo una frase.
A: "B y D son mendaces".
B: "Hay algunos leones blancos en Pandora".
C: "Hay exactamente dos mendaces entre nosotros".
D: "No hay leones blancos, ni tigres verdes en Pandora".
E: "A y yo somos, ambos, mendaces".
F: "Hay más tigres verdes que rinocerontes dorados en Pandora".
G: "Hay exactamente 5 mendaces entre nosotros".
Determine si hay rinocerontes dorados en Pandora.

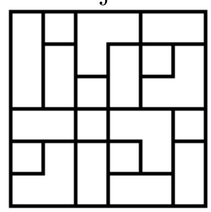
8. La dinastía de los Doggetts fue fundada por un tal Timothy Doggett. Se sabe que ningún hombre de esta dinastía ha muerto antes de los 30 años. Más aún, cada hombre de la dinastía de los Doggett tiene 2 ó 3 hijos, con cada hijo nacido cuando el padre tenía una edad comprendida entre 25 y 30 años. Actualmente hay 125 hombres en la dinastía de los Doggetts (los Doggetts muertos no se incluyen). ¿En qué siglo nació Timothy Doggett?

Olimpiada Matemática Internacional
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"

Curso 2017/2018. Primera Fase

Problemas Nivel R6

1. Muestre cómo cortar este cuadrado en 4 partes iguales, en forma y tamaño, si solo está permitido cortar a lo largo de las líneas dibujadas en la figura.



2. Hay autos azules, buses azules, barcos azules y trenes verdes en una juguetería. Daniel ha comprado varios juguetes y ha notado que la mitad de sus juguetes azules son autos, y que la mitad de sus juguetes de transportación terrestre son buses. ¿Cuántos barcos compró Daniel?

3. Andrés estaba solo en casa, pero oyendo atentamente el sonido de las gotas de agua cayendo desde el grifo a intervalos regulares. 48 minutos pasaron entre el sonido de la primera y última gota, y hubo un intervalo de 44 minutos entre la quinta y última gota. ¿Cuántas gotas oyó Andrés?

4. ¿Es posible colocar todos los números desde 1 a 30 dentro de una tabla con 5 filas y 6 columnas, de tal manera que la suma en cualquier columna sea menor que la suma en cualquier fila?

5. Un entero positivo es llamado *bueno* si todos sus dígitos se repiten al menos dos veces (por ejemplo, 1522521 es bueno, pero 1522522 no). ¿Cuántos números buenos de cuatro cifras hay, que no contengan al cero?

6. Una página de papel 210 mm$\times$297 mm se corta en varios rectángulos iguales, con el ancho dos veces más grande que su longitud. ¿Cuál es el área máxima de uno de esos rectángulos? No se olvide de probar su respuesta.

7. La dinastía de los Doggetts fue fundada por un tal Timothy Doggett. Se sabe que ningún hombre de esta dinastía ha muerto antes de los 30 años. Más aún, cada hombre de la dinastía de los Doggett tiene 2 ó 3 hijos, con cada hijo nacido cuando el padre tenía una edad comprendida entre 25 y 30 años. Actualmente hay 125 hombres en la dinastía de los Doggetts (los Doggetts muertos no se incluyen). ¿En qué siglo nació Timothy Doggett?

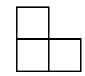
8. Un árbol de bambú crece en el parque. Durante muchos años, este bambú ha estado creciendo la misma cantidad cada noche. Cada mañana, un jardinero ha estado podando este bambú para dejarlo de una altura inferior a 1 metro.
   Es sabido que el jardinero siempre corta un pedazo cuya longitud es una cantidad entera de metros. Además, el jardinero lleva cuenta de su trabajo escribiendo las longitudes de los pedazos que corta.
   a) ¿Es posible que en el curso de 10 días, la sucesión $7; 7; 7; 6; 7; 7; 6; 7; 7; 7$ sea escrita?
   b) ¿Y la sucesión $7; 7; 7; 6; 7; 6; 7; 7; 6; 7$? En ambos casos, explique su respuesta.

Olimpiada Matemática Internacional
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”

Curso 2017/2018. Primera Fase

Problemas Nivel R7

1. Muestre cómo cortar 12 ’‘esquinas” de tres celdas (vea la figura) de un tablero de 8×8, de tal manera que sea imposible cortar otra “esquina” de la parte restante del tablero. La “esquina” puede ser rotada.



2. Halle un ejemplo de 7 enteros positivos diferentes tales que su suma sea igual a su mínimo común múltiplo.

3. Un punto E está sobre el lado CD de un cuadrado $ABCD$. Las bisectrices de los ángulos EAB y EAD interceptan a los lados BC y CD en los puntos M y N, respectivamente. F es un punto sobre el segmento AE tal que $AF = AB$. Demuestre que F está sobre la recta MN.

4. Un entero positivo es llamado *bueno* si todos sus dígitos se repiten al menos dos veces (por ejemplo, 1522521 es bueno, pero 1522522 no). ¿Cuántos números buenos de cinco cifras hay, que no contengan al cero?

5. Se llama *mediante* de dos fracciones irreducibles $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$, a la fracción irreducible cuyo valor es $\frac{m+p}{n+q}$. Sea z la mediante de x y y, u la mediante de x y z, y v la mediante de y y z. ¿Será siempre cierto que z es la mediante de u y v?

6. En la siguiente tabla, 12 números están pintados de azul y otros 12 números están pintados de rojo. Se sabe que la suma de los números azules es 4 veces mayor que la suma de los números rojos. ¿Cuál es el número que no está pintado?

5	11	7	12	1
34	13	2	22	17
24	51	9	51	19
16	32	10	20	42
27	2017	67	99	100

7. Un árbol de bambú crece en el parque. Durante muchos años, este bambú ha estado creciendo la misma cantidad cada noche. Cada mañana, un jardinero ha estado podando este bambú para dejarlo de una altura inferior a 1 metro.
Es sabido que el jardinero siempre corta un pedazo cuya longitud es una cantidad entera de metros. Además, el jardinero lleva cuenta de su trabajo escribiendo las longitudes de los pedazos que corta.
a) ¿Es posible que en el curso de 10 días, la sucesión $7; 7; 7; 6; 7; 7; 6; 7; 7; 7$ sea escrita?
b) ¿Y la sucesión $7; 7; 7; 6; 7; 6; 7; 7; 6; 7$? En ambos casos, explique su respuesta.

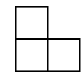
8. Un bosque cuadrado consta de 1 millón de cuadrados iguales, y un árbol crece en el centro de cada cuadrado. Si un árbol es cortado, un muñón permanece. Desde un muñón se puede ver otro si no hay árboles en el segmento que los conecta (otros muñones en el segmento no importan). ¿Cuál es el máximo número de árboles que pueden ser cortados, de tal manera que desde cualquier muñón sea imposible ver a cualquier otro? Asuma que los árboles y los muñones carecen de grosor.

Olimpiada Matemática Internacional
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”

Curso 2017/2018. Primera Fase

Problemas Nivel R8

1. Muestre cómo cortar 12 ’‘esquinas” de tres celdas (vea la figura) de un tablero de 8×8, de tal manera que sea imposible cortar otra “esquina” de la parte restante del tablero. La “esquina” puede ser rotada.



2. Un punto E está sobre el lado CD de un cuadrado $ABCD$. Las bisectrices de los ángulos EAB y EAD interceptan a los lados BC y CD en los puntos M y N, respectivamente. F es un punto sobre el segmento AE tal que $AF = AB$. Demuestre que F está sobre la recta MN.

3. Un entero positivo es llamado *bueno* si todos sus dígitos se repiten al menos dos veces (por ejemplo, 1522521 es bueno, pero 1522522 no). ¿Cuántos números buenos de seis cifras hay, que no contengan al cero?

4. En un país muy, muy lejano, la gente usa diferentes estándares para los tamaños de papel. Los formatos de los estándares de papel son definidos como siguen: la página K0 es un cuadrado con lados de 1 metro. Si un círculo es inscrito en el cuadrado K0, y un cuadrado es inscrito en ese círculo, entonces este segundo cuadrado tendría el formato K1. Si inscribimos un círculo dentro de K1, y luego otro cuadrado dentro de él otra vez, obtenemos una página de formato K2. De este modo describimos los formatos hasta K10. Cuando Pedro visitó este país, él compró una página azul K0 y páginas blancas K1, K2, ..., K10 (una de cada formato). ¿Puede Pedro cortar las páginas blancas en partes que cubran completamente la página azul (sobre un lado)?

5. En la siguiente tabla, 12 números están pintados de azul y otros 12 números están pintados de rojo. Se sabe que la suma de los números azules es 4 veces mayor que la suma de los números rojos. ¿Cuál es el número que no está pintado?

5	11	7	12	1
34	13	2	22	17
24	51	9	51	19
16	32	10	20	42
27	2017	67	99	100

6. Un bosque cuadrado consta de 1 millón de cuadrados iguales, y un árbol crece en el centro de cada cuadrado. Si un árbol es cortado, un muñón permanece. Desde un muñón se puede ver otro si no hay árboles en el segmento que los conecta (otros muñones en el segmento no importan). ¿Cuál es el máximo número de árboles que pueden ser cortados, de tal manera que desde cualquier muñón sea imposible ver a cualquier otro? Asuma que los árboles y los muñones carecen de grosor.

7. Halle todas las soluciones reales del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a\,(b-c+1) = b^2 - bc + c, \\ b\,(c-a+1) = c^2 - ca + a, \\ c\,(a-b+1) = a^2 - ab + b. \end{cases}$$

8. ¿Para cuáles $n > 1$ hay n enteros positivos diferentes tales que su suma sea igual a su mínimo común múltiplo?

Olimpiada Matemática Internacional
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”
Curso 2017/2018. Primera Fase
Problemas Nivel R9

1. Hay autos azules, buses azules, barcos azules y trenes verdes en una juguetería. Daniel ha comprado varios juguetes y ha notado que la mitad de sus juguetes azules son autos, y que la mitad de sus juguetes de transportación terrestre son buses. ¿Cuántos barcos compró Daniel?

2. Se llama *mediante* de dos fracciones irreducibles $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$, a la fracción irreducible cuyo valor es $\frac{m+p}{n+q}$. Dé un ejemplo de nueve fracciones irreducibles (en orden ascendente) tales que cada una de ellas, excepto la menor y la mayor de todas, sea la mediante de dos fracciones adyacentes.

3. ¿Es posible situar 5 puntos en el plano (que no descansen sobre una misma línea recta) tal que la distancia entre cada dos puntos sea un entero?

4. Un entero positivo es llamado *bueno* si todos sus dígitos se repiten al menos dos veces (por ejemplo, 1522521 es bueno, pero 1522522 no). ¿Cuántos números buenos de siete cifras hay, que no contengan al cero?

5. Un triángulo isósceles ABC tiene un ángulo recto A. Dos triángulos agudos e iguales ABP y ACQ ($PB = AQ$) son construidos sobre los lados AB y AC, fuera de $\triangle ABC$. Las rectas PB y CQ se intersectan en M. Pruebe que: (a) $PA \perp QC$; (b) $MA \perp PQ$.

6. Para cualquier entero positive n, definimos a $S(n)$ como la suma de los dígitos de n. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación que está debajo?
$$S(n) + S^2(n) + \ldots + S^{2016}(n) = 2017^{2017}.$$
Aquí $S^2(n) = S(S(n))$, $S^3(n) = S(S^2(n))$, $S^4(n) = S(S^3(n))$ etc.

7. Halle todas las soluciones reales del siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} a\,(b-c+1) = b^2 - bc + c, \\ b\,(c-a+1) = c^2 - ca + a, \\ c\,(a-b+1) = a^2 - ab + b. \end{cases}$$

8. Todos los puntos sobre la recta numérica están pintados en 4 colores. Los números pares son negros, los números impares son blancos, los intervalos de puntos negros a puntos blancos $(2k, 2k+1)$ son rojos, y los intervalos de puntos blancos a puntos negros $(2k+1, 2k+2)$ son azules. Inicialmente, dos saltamontes están situados en puntos diferentes A y B entre 0 y 1. Cada minuto, ambos saltamontes dan un salto que multiplica sus coordenadas por 2 (el primer saltamontes brinca en $2A$, $4A$, $8A$ etc., y el segundo brinca en $2B$, $4B$, $8B$ etc.). ¿Será cierto que eventualmente los saltamontes puedan estar en puntos de colores diferentes?

Olimpiada Matemática Internacional
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”
Curso 2017/2018. Primera Fase
Problemas Nivel R10

1. Una página de papel 210 mm$\times$300 mm se corta en varios rectángulos iguales con el ancho dos veces más grande que su longitud. ¿Cuál es el área máxima de uno de esos rectángulos? No se olvide de demostrar su respuesta.

2. ¿Es posible situar 5 puntos en el plano (que no descansen sobre una misma línea recta) tal que la distancia entre cada dos puntos sea un entero?

3. Todas las criaturas vivientes de Pandora pueden ser divididas en caballeros (siempre dicen la verdad), mendaces (siempre mienten) y animales (no dicen nada). Un día, cada uno de los siete habitantes de Pandora (A, B, C, D, E, F y G) dijo una frase.
   A: “B y D son mendaces”.
   B: “Hay algunos leones blancos en Pandora”.
   C: “Hay exactamente dos mendaces entre nosotros”.
   D: “No hay leones blancos, ni tigres verdes en Pandora”.
   E: “A y yo somos, ambos, mendaces”.
   F: “Hay más tigres verdes que rinocerontes dorados en Pandora”.
   G: “Hay exactamente 5 mendaces entre nosotros”.
   Determine si hay rinocerontes dorados en Pandora.

4. El juego “¿Qué?, ¿Dónde?, ¿Cuándo?” es jugado con una rueda que es dividida en 13 sectores. Una flecha, que gira aleatoriamente, se detiene en cualquier sector con la misma probabilidad. Un sobre con una pregunta yace en cada sector. Para cada nueva ronda, una flecha gira, y una nueva pregunta es escogida como sigue: si la flecha apunta hacia un sector con una pregunta todavía no usada, esta pregunta es seleccionada. De otro modo, la primera pregunta no usada en el sentido de las manecillas del reloj es elegida. Numeramos las preguntas en sentido harario desde 1 a 13.
   Suponga que después de 7 rondas, las preguntas 3, 4, 5, 6, 8, 9, y 10 fueron elegidas y hay todavía más de una ronda hasta que el juego termine. ¿Cuál de las preguntas remanentes tiene la mayor probabilidad de ser seleccionada en las siguientes 2 rondas?

5. Un punto O es el centro de un triángulo equilátero ABC. Un círculo que pasa a través de los puntos A y O intersecta a los lados AB y AC en los puntos M y N, respectivamente. Demuestre que $AN = BM$.

6. Para cada real p, halle cuántas soluciones tiene la ecuación: $x^2 + p = \sqrt{x - p}$.

7. Todos los puntos sobre la recta numérica están pintados en 4 colores. Los números pares son negros, los números impares son blancos, los intervalos de puntos negros a puntos blancos $(2k, 2k + 1)$ son rojos, y los intervalos de puntos blancos a puntos negros $(2k + 1, 2k + 2)$ son azules. Inicialmente, dos saltamontes están situados en puntos diferentes A y B entre 0 y 1. Cada minuto, ambos saltamontes dan un salto que multiplica sus coordenadas por 2 (el primer saltamontes brinca en $2A$, $4A$, $8A$ etc., y el segundo brinca en $2B$, $4B$, $8B$ etc.). ¿Será cierto que eventualmente los saltamontes puedan estar en puntos de colores diferentes?

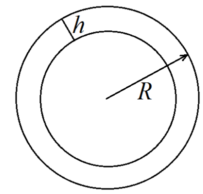
8. Se dan dos números reales a y b, tales que $a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$.
   Demuestre que $4a^2 + 4b^2 - ab \geq 30$.

Olimpiada Matemática Internacional
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"

Curso 2017/2018. Primera Fase

Problemas Nivel R11

1. Un túnel redondo tiene de radio exterior $R = 200$ m y $h = 30$ m de ancho. ¿Es posible colgar seis focos de tal manera que puedan iluminar la totalidad del túnel?



2. ¿Es posible que exactamente 42 de los primeros 100 términos de una progresión aritmética sean enteros?

3. El juego "¿Qué?, ¿Dónde?, ¿Cuándo?" es jugado con una rueda que es dividida en 13 sectores. Una flecha, que gira aleatoriamente, se detiene en cualquier sector con la misma probabilidad. Un sobre con una pregunta yace en cada sector. Para cada nueva ronda, una flecha gira, y una nueva pregunta es escogida como sigue: si la flecha apunta hacia un sector con una pregunta todavía no usada, esta pregunta es seleccionada. De otro modo, la primera pregunta no usada en el sentido de las manecillas del reloj es elegida. Numeramos las preguntas en sentido harario desde 1 a 13.
Suponga que después de 7 rondas, las preguntas 3, 4, 5, 6, 8, 9, y 10 fueron elegidas y hay todavía más de una ronda hasta que el juego termine. ¿Cuál de las preguntas remanentes tiene la mayor probabilidad de ser seleccionada en las siguientes 2 rondas?

4. Un punto O es el centro de un triángulo equilátero ABC. Un círculo que pasa a través de los puntos A y O intersecta a los lados AB y AC en los puntos M y N, respectivamente. Demuestre que $AN = BM$.

5. Halle algún polinomio no constante $P(t)$, tal que la igualdad $P(\sin x) = P(\cos x)$ sea correcta para todo x.

6. Todos los puntos sobre la recta numérica están pintados en 4 colores. Los números pares son negros, los números impares son blancos, los intervalos de puntos negros a puntos blancos $(2k, 2k+1)$ son rojos, y los intervalos de puntos blancos a puntos negros $(2k+1, 2k+2)$ son azules. Inicialmente, dos saltamontes están situados en puntos diferentes A y B entre 0 y 1. Cada minuto, ambos saltamontes dan un salto que multiplica sus coordenadas por 2 (el primer saltamontes brinca en $2A$, $4A$, $8A$ etc., y el segundo brinca en $2B$, $4B$, $8B$ etc.). ¿Será cierto que eventualmente los saltamontes puedan estar en puntos de colores diferentes?

7. Son dados dos poliedros: un prisma regular y una bipirámide regular; las bases de ambos poliedros son 25-ágonos regulares. Para cada poliedro, la máxima cantidad posible de vértices en su sección transversal (es decir, la intersección del poliedro y un plano) es contabilizada. ¿Para cuál de los poliedros dicha cuenta es más grande? (Una bipirámide regular es un poliedro formado al unir una pirámide regular con su imagen, base a base.)

8. Se dan dos números reales a y b, tales que $a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$.
Demuestre que $4a^2 + 4b^2 - ab \geq 30$.