

Formula of Unity Olympiad

2017- 2018. Round 1

Language: Persian (Farsi)

Translated by: Amir Reza Arab

تاریخ برگزاری مرحله ی اول: ۲۴ مهر تا ۲۲ آبان ۱۳۹۶

پایه های تحصیلی: پنجم ابتدایی تا یازدهم متوسطه

تعداد مسائل: هشت مساله در هر پایه ی تحصیلی

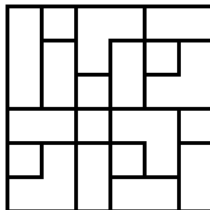
شرکت در این المپیاد رایگان است.

Email: formulo.iran@yahoo.com

Website: WWW.MathSymbol.ir

مسائل مرحله ی اول المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۷/۲۰۱۸ - پایه ی پنجم ابتدایی

- ۱- اگر بریدن فقط در امتداد خطوط رسم شده در شکل مجاز باشد، چگونگی بریدن این مربع به ۴ قسمت مساوی از نظر اندازه و شکل را نشان دهید.



- ۲- آیا اعداد صحیح مثبت مختلف a و b وجود دارند به طوری که a بر b ، $a+1$ بر $b+1$ و $a+2$ بر $b+2$ بخش پذیر باشد؟
- ۳- در فروشگاه اسباب بازی، ماشین های آبی، اتوبوس های آبی، کشتی های آبی و قطارهای سبز وجود دارند. دانیل چند اسباب بازی خریده بود و متوجه شد که نصف اسباب بازی های آبی اش ماشین و نصف اسباب بازی های حمل و نقل زمینی اش اتوبوس بودند. دانیل چند کشتی خرید؟
- ۴- آندری در خانه تنها بود؛ او صدای بلند افتادن قطره های آب از شیر را در فواصل منظم می شنید. بین اولین و آخرین صدا ۴۸ دقیقه گذشت و بین پنجمین و آخرین صدا یک بازه ی ۴۴ دقیقه ای بود. آندری چند صدا شنید؟
- ۵- یک عدد صحیح مثبت، خوب نامیده می شود، اگر هر یک از رقم هایش در نمایش ده دهی، حداقل دو بار تکرار شده باشد(مثلاً ۱۵۲۲۵۲۱ خوب است، اما ۱۵۲۲۵۲۲ خوب نیست). چند عدد ۳ رقمی خوب بدون رقم ۰ وجود دارد؟
- ۶- ورقه ی کاغذی به ابعاد ۳۰۰ میلی متر $\times$ ۲۱۰ میلی متر به چند مستطیل مساوی با عرض دو برابر طول بریده می شود. بیش ترین مساحت یکی از چنین مستطیل هایی چقدر است؟ ادعای خود را ثابت کنید.
- ۷- تمامی موجودات ساکن پاندورا می توانند به شوالیه ها(آن ها همیشه راست می گویند)، دروغ گوها(آن ها همیشه دروغ می گویند) و حیوانات(آن ها چیزی نمی گویند) تقسیم شوند. روزی، هر یک از هفت ساکن پاندورا (A, B, C, D, E, F و G) جمله ای گفت:
- A: "B و D دروغ گو هستند."
- B: "شیرهای سفیدی در پاندورا وجود دارند."
- C: "دقیقا دو دروغ گو در بین ما وجود دارند."
- D: "هیچ شیر سفید و هیچ ببر سبز در پاندورا وجود ندارد."
- E: "من و A هر دو دروغ گو هستیم."
- F: "در پاندورا ببرهای سبز بیش تر از کرگدن های طلایی هستند."
- G: "دقیقا ۵ دروغ گو در بین ما وجود دارند."
- وجود کرگدن های طلایی در پاندورا را تعیین نمایید.
- ۸- خاندان داگت ها توسط تیموتی داگت تاسیس شد. می دانیم هیچ مردی از این خاندان پیش از ۳۰ سالگی نمرده بود. به علاوه هر مرد داگت، ۲ یا ۳ پسر داشت که تولد هر پسری بین ۲۵ و ۳۰ سالگی پدر بود. در حال حاضر، ۱۲۵ مرد در خاندان داگت ها وجود دارند(داگت های مرده محسوب نمی شوند). تیموتی داگت در چه قرنی متولد شد؟

مسائل مرحله ی اول المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۷- پایه ی هشتم متوسطه

- ۱- چگونگی بریدن ۱۲ گوشه ی ۳ خانه ای (شکل را ببینید) از صفحه ای 8×8 ، به طوری که بریدن گوشه ای دیگر از قسمت باقی مانده از صفحه غیر ممکن باشد، را نشان دهید. گوشه می تواند چرخانده شود.



- ۲- نقطه ی E بر ضلع CD از مربع ABCD قرار دارد. نیم سازه های زوایای EAB و EAD اضلاع BC و CD را به ترتیب در نقاط M و N قطع می کنند. F نقطه ای بر نیم خط AE است، به طوری که $AF=AB$. ثابت کنید F بر خط MN قرار دارد.

- ۳- یک عدد صحیح مثبت، خوب نامیده می شود، اگر هر یک از رقم هایش در نمایش ده دهی، حداقل دو بار تکرار شده باشد (مثلاً ۱۵۲۲۵۲۱ خوب است، اما ۱۵۲۲۵۲۲ خوب نیست). چند عدد ۶ رقمی خوب بدون رقم ۰ وجود دارد؟
- ۴- در کشوری خیلی خیلی دور، مردم از استاندارد متفاوتی برای اندازه های کاغذ استفاده می کنند. فرمت های کاغذ استاندارد به این صورت تعریف می شوند: ورق K_0 مربعی با ضلع ۱ متر است. اگر دایره ای در مربع K_0 محاط شود و مربعی درون آن دایره محاط شود، در نتیجه این مربع دوم بایستی فرمت K_1 را داشته باشد. اگر دایره ای را در K_1 محاط کنیم و سپس مجدداً مربعی را درون آن، به ورق فرمت K_2 می رسمیم. به همین روش، فرمت ها را تا K_{10} توصیف می کنیم. وقتی پیتز از این کشور بازدید کرد یک ورق آبی K_0 و ورق های سفید $K_1, K_2, \dots, K_{10}$ (از هر کدام یکی) خرید. آیا او می تواند ورق های سفید را به تکه هایی ببرد که ورق آبی را به طور کامل بپوشانند؟ (روی یک طرف)

- ۵- در جدول زیر، ۱۲ عدد آبی رنگ و ۱۲ عدد دیگر قرمز رنگ می شوند. می دانیم مجموع اعداد آبی ۴ برابر مجموع اعداد قرمز است. کدام عدد رنگ نمی شود؟

۵	۱۱	۷	۱۲	۱
۳۴	۱۳	۲	۲۲	۱۷
۲۴	۵۱	۹	۵۱	۱۹
۱۶	۳۲	۱۰	۲۰	۴۲
۲۷	۲۰۱۷	۶۷	۹۹	۱۰۰

- ۶- جنگلی مربعی از ۱ میلیون مربع مساوی تشکیل شده است، و یک درخت در مرکز هر مربعی می روید. اگر درختی بریده شود، کنده ای باقی می ماند. از یک کنده شما می توانید کنده ی دیگری را ببینید هرگاه هیچ درختی روی پاره خط واصل آن ها نباشد (کنده های دیگر روی پاره خط اهمیتی ندارند). بیش ترین تعداد درختانی که می توانند قطع شوند به طوری که از هر کنده ای دیدن هر کنده ی دیگر غیر ممکن باشد، چقدر است؟ فرض کنید که درخت ها و کنده ها دارای ضخامت صفر هستند.

- ۷- تمامی جواب های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$$\begin{cases} a(b-c+1) = b^2 - bc + c \\ b(c-a+1) = c^2 - ca + a \\ c(a-b+1) = a^2 - ab + b \end{cases}$$

- ۸- برای کدام $n, n > 1$ عدد صحیح مثبت مختلف وجود دارند به طوری که مجموع شان برابر کوچک ترین مضرب مشترک شان باشد؟

مسائل مرحله ی اول المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۷/۲۰۱۸ – پایه ی نهم متوسطه

- ۱- در فروشگاه اسباب بازی، ماشین های آبی، اتوبوس های آبی، کشتی های آبی و قطارهای سبز وجود دارند. دانیل چند اسباب بازی خریده بود و متوجه شد که نصف اسباب بازی های آبی اش ماشین و نصف اسباب بازی های حمل و نقل زمینی اش اتوبوس بودند. دانیل چند کشتی خرید؟
- ۲- میانک دو کسر ساده نشدنی $\frac{m}{n}$ و $\frac{p}{q}$ ، کسری ساده نشدنی است که مقدار آن برابر $\frac{m+p}{n+q}$ می باشد. مثالی از ۹ کسر ساده نشدنی (به ترتیب صعودی) بیاورید به طوری که هر یک از آن ها، به جز کوچک ترین و بزرگ ترین آن ها، میانک دو کسر مجاورش باشد.
- ۳- آیا ممکن است ۵ نقطه را بر صفحه (بر یک خط راست قرار نگیرند) طوری بگذاریم که فاصله ی بین هر دو نقطه عددی صحیح باشد؟
- ۴- یک عدد صحیح مثبت، خوب نامیده می شود، اگر هر یک از رقم هایش در نمایش ده دهی، حداقل دو بار تکرار شده باشد (مثلاً ۱۵۲۲۵۲۱ خوب است، اما ۱۵۲۲۵۲۲ خوب نیست). چند عدد ۷ رقمی خوب بدون رقم ۰ وجود دارد؟
- ۵- مثلث متساوی الساقین ABC دارای زاویه ی قائمه ی A است. دو مثلث حاده الزاویه ی مساوی ABP و ACQ و (PB=AQ) بر اضلاع AB و AC خارج $\triangle ABC$ بنا می شوند. خطوط PB و CQ همدیگر را در M قطع می کنند. ثابت کنید: الف) $PA \perp QC$ ؛ ب) $MA \perp PQ$.
- ۶- برای هر عدد صحیح مثبت n ، $S(n)$ را مجموع رقم های n تعریف می کنیم. معادله ی زیر چند جواب دارد؟

$$S(n) + S^2(n) + \dots + S^{2017}(n) = 2017^{2017}$$

در این جا $S^2(n) = S(S(n))$ ، $S^3(n) = S(S^2(n))$ ، $S^4(n) = S(S^3(n))$ و الی آخر.

- ۷- تمامی جواب های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید.

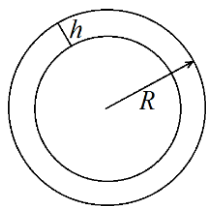
$$\begin{cases} a(b-c+1) = b^2 - bc + c \\ b(c-a+1) = c^2 - ca + a \\ c(a-b+1) = a^2 - ab + b \end{cases}$$

- ۸- تمامی نقاط بر خط اعداد با ۴ رنگ، رنگ آمیزی می شوند. اعداد زوج سیاه هستند، اعداد فرد سفید هستند، بازه ها از نقاط سیاه تا نقاط سفید $((2k, 2k+1))$ قرمز هستند، و بازه ها از نقاط سفید تا نقاط سیاه $((2k+1, 2k+2))$ آبی هستند. در آغاز، دو ملخ در نقاط مختلف A و B بین ۰ و ۱ قرار گرفته اند. هر دقیقه، هر دو ملخ جهشی می کنند که مختصات شان را ۲ برابر می کند (ملخ اول به $2A$ ، $4A$ ، $8A$ و الی آخر می جهد و ملخ دوم به $2B$ ، $4B$ ، $8B$ و الی آخر می جهد). آیا به طور قطعی درست است که سرانجام ملخ ها در نقاط با رنگ های مختلف خواهند بود؟

مسائل مرحله ی اول المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۷/۲۰۱۸ - پایه ی دهم متوسطه

- ۱- ورقه ی کاغذی به ابعاد 300 میلی متر $\times$ 210 میلی متر به چند مستطیل مساوی با عرض دو برابر طول بریده می شود. بیش ترین مساحت یکی از چنین مستطیل هایی چقدر است؟ ادعای خود را ثابت کنید.
- ۲- آیا ممکن است 5 نقطه را بر صفحه (بر یک خط راست قرار نگیرند) طوری بگذاریم که فاصله ی بین هر دو نقطه عددی صحیح باشد؟
- ۳- تمامی موجودات ساکن پاندورا می توانند به شوالیه ها (آن ها همیشه راست می گویند)، دروغ گوها (آن ها همیشه دروغ می گویند) و حیوانات (آن ها چیزی نمی گویند) تقسیم شوند. روزی، هر یک از هفت ساکن پاندورا A, B, C, D, E, F و G جمله ای گفت:
 A : "B و D دروغ گو هستند."
 B : "شیرهای سفیدی در پاندورا وجود دارند."
 C : "دقیقا دو دروغ گو در بین ما وجود دارند."
 D : "هیچ شیر سفید و هیچ ببر سبز در پاندورا وجود ندارد."
 E : "من و A هر دو دروغ گو هستیم."
 F : "در پاندورا ببرهای سبز بیش تر از کرگدن های طلایی هستند."
 G : "دقیقا 5 دروغ گو در بین ما وجود دارند."
وجود کرگدن های طلایی در پاندورا را تعیین نمایید.
- ۴- بازی "چه؟ کجا؟ چه وقت؟" با چرخشی که به 13 قطاع تقسیم شده است، انجام می شود. پیکانی که به طور تصادفی می چرخد، با احتمال برابر در هر قطاعی توقف می کند. در هر قطاعی، نامه ای حاوی یک سوال قرار دارد. برای هر دور جدید، پیکان چرخانده می شود و سوال جدیدی به این صورت انتخاب می شود: اگر پیکان، قطاعی با سوال استفاده نشده را نشان دهد، این سوال انتخاب می شود. در غیر این صورت، اولین سوال استفاده نشده در جهت عقربه های ساعت انتخاب می شود. سوالات را در جهت عقربه های ساعت از 1 تا 13 شماره گذاری می کنیم. فرض کنید پس از 7 دور، سوالات $3, 4, 5, 6, 8, 9$ و 10 پرسیده شدند و هنوز بیش از یک دور تا پایان این بازی وجود دارد. کدام یک از سوالات باقی مانده بالاترین احتمال را برای انتخاب شدن در 2 دور بعدی دارند؟
- ۵- نقطه ی O مرکز مثلث متساوی الاضلاع ABC است. دایره ی گذرا از نقاط A و O ، اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط M و N قطع می کند. ثابت کنید $AN=BM$.
- ۶- برای هر عدد حقیقی p ، معادله ی $x^2 + p = \sqrt{x-p}$ چند جواب دارد؟
- ۷- تمامی نقاط بر خط اعداد با 4 رنگ، رنگ آمیزی می شوند. اعداد زوج سیاه هستند، اعداد فرد سفید هستند، بازه ها از نقاط سیاه تا نقاط سفید $((2k, 2k+1))$ قرمز هستند، و بازه ها از نقاط سفید تا نقاط سیاه $((2k+1, 2k+2))$ آبی هستند. در آغاز، دو ملخ در نقاط مختلف A و B بین 0 و 1 قرار گرفته اند. هر دقیقه، هر دو ملخ جهشی می کنند که مختصات شان را 2 برابر می کند (ملخ اول به $2A, 4A, 8A$ و الی آخر می جهد و ملخ دوم به $2B, 4B, 8B$ و الی آخر می جهد). آیا به طور قطعی درست است که سرانجام ملخ ها در نقاط با رنگ های مختلف خواهند بود؟
- ۸- برای دو عدد حقیقی a و b داریم: $a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$. ثابت کنید:
 $4a^2 + 4b^2 - ab \geq 30$.

مسائل مرحله ی اول المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۷/۲۰۱۸- پایه ی یازدهم متوسطه



- ۱- تونل گردی دارای شعاع خارجی، متر $R=200$ و ضخامت، متر $h=30$ است. آیا ممکن است شش لامپ روشنایی را طوری آویزان کنیم که آن ها تمامی تونل را روشن کنند؟
- ۲- آیا ممکن است که دقیقا ۴۲ تا از ۱۰۰ جمله ی اول دنباله ای حسابی، اعدادی صحیح باشند؟
- ۳- بازی "چه؟ کجا؟ چه وقت؟" با چرخشی که به ۱۳ قطاع تقسیم شده است، انجام می شود. پیکانی که به طور تصادفی می چرخد، با احتمال برابر در هر قطاعی توقف می کند. در هر قطاعی، نامه ای حاوی یک سوال قرار دارد. برای هر دور جدید، پیکان چرخانده می شود و سوال جدیدی به این صورت انتخاب می شود: اگر پیکان، قطاعی با سوال استفاده نشده را نشان دهد، این سوال انتخاب می شود. در غیر این صورت، اولین سوال استفاده نشده در جهت عقربه های ساعت انتخاب می شود. سوالات را در جهت عقربه های ساعت از ۱ تا ۱۳ شماره گذاری می کنیم. فرض کنید پس از ۷ دور، سوالات ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹ و ۱۰ پرسیده شدند و هنوز بیش از یک دور تا پایان این بازی وجود دارد. کدام یک از سوالات باقی مانده بالاترین احتمال را برای انتخاب شدن در ۲ دور بعدی دارند؟
- ۴- نقطه ی O مرکز مثلث متساوی الاضلاع ABC است. دایره ی گذرا از نقاط A و O ، اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط M و N قطع می کند. ثابت کنید $AN=BM$.
- ۵- چند جمله ای غیر ثابت $P(t)$ را بیابید به طوری که تساوی $P(\sin x) = P(\cos x)$ برای هر x برقرار باشد.
- ۶- تمامی نقاط بر خط اعداد با ۴ رنگ، رنگ آمیزی می شوند. اعداد زوج سیاه هستند، اعداد فرد سفید هستند، بازه ها از نقاط سیاه تا نقاط سفید $((2k, 2k+1))$ قرمز هستند، و بازه ها از نقاط سفید تا نقاط سیاه $((2k+1, 2k+2))$ آبی هستند. در آغاز، دو ملخ در نقاط مختلف A و B بین ۰ و ۱ قرار گرفته اند. هر دقیقه، هر دو ملخ جهشی می کنند که مختصات شان را ۲ برابر می کند (ملخ اول به $2A, 4A, 8A$ و الی آخر می جهد و ملخ دوم به $2B, 4B, 8B$ و الی آخر می جهد). آیا به طور قطعی درست است که سرانجام ملخ ها در نقاط با رنگ های مختلف خواهند بود؟
- ۷- دو چند وجهی داده شده اند: منشور منتظم و دوهرمی منتظم؛ قاعده های هر دو چند وجهی ۲۵ ضلعی منتظم هستند. برای هر چند وجهی، بیش ترین مقدار ممکن راس های مقطع عرضی اش (اشتراک چند وجهی و یک صفحه) شمرده می شود. برای کدام چند وجهی، نتیجه بزرگ تر است؟ (دو هرمی منتظم چند وجهی ای است که از اتصال قاعده به قاعده ی هرم منتظم و تصویرش ایجاد می شود).
- ۸- برای دو عدد حقیقی a و b داریم: $a^6 + b^6 + a^2b^2 = 60$. ثابت کنید:

$$4a^2 + 4b^2 - ab \geq 30$$