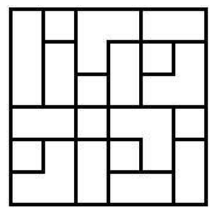
საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"
სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
2017 - 2018 წწ. I ტური
5 კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბეთეთ

1. აჩვენეთ, როგორ გავჭრათ ეს კვადრატი ოთხ ერთნაირი ფორმისა და ზომის ნაწილად, თუ გაჭრა შეიძლება მხოლოდ აღნიშნული ხაზებით.



2. არსებობს თუ არა ისეთი სხვადსხვა ნატურალური რიცხვები a და b, რომ a იყოს b-ს ჯერადი, a+1 იყოს b+1-ს ჯერადი, a+2 იყოს b+2-ს ჯერადი?

3. სათამაშოების მაღაზიაში იყიდებოდა ლურჯი მანქანები, ლურჯი ავტობუსები, ლურჯი გემები და მწვანე მატარებლები. როდესავ მიშიკომ იყიდა რამდენიმე სათამაშო, მან აღმოაჩინა, რომ ნაყიდი ლურჯი სათამაშოების ნახევარი მანქანებია, ხოლო სახმელეთო ტრანსპორტის ნახევარი ავტობუსებია. რამდენი გემი იყიდა მიშიკომ?

4. როდესაც ანდრია სახლში მარტო დარჩა, მან დაიწყო წვეთების დათვლა, რომლებიც დროის თანაბარი ინტერვალით წვეთავდნენ თითქმის დახურული ონკანიდან. პირველსა და ბოლოსწინა დაწვეთებებს შორის 48 წუთი გავიდა, ხოლო მეხუთე და ბოლო დაწვეთბებს შორის 44 წუთი. სულ რამდენი დაწვეთება დათვალა ანდრიამ?

5. ნატურალურ რიცხვს დავარქვათ კარგი, თუ მის ჩაწერაში გამოყენებული ციფრები მეორდება ორჯერ მაინც (მაგ., 1522521 - კარგი რიცხვია, ხოლო 1522522 - არა). რამდენი არსებობს სამნიშნა კარგი რაცხვი, რომლის ჩაწერაში "0" არ გამოიყენება?

6. მართკუთხა ფურცელი ზომით 210 მმ × 300 მმ უნდა მთლიანად დავჭრათ ტოლი ზომის მართკუთხედებად ისე, რომ მათი სიგრძე იყოს ორჯერ მეტი სიგანეზე. რა უდიდესი ფართობის მართკუთხედები შეიძლება მივიღოთ. დაასაბუთეთ, რომ ეს ზომა უდიდესია.

7. პანდორას პლანეტაზე ცხოვრობენ რაინდები, რომლებიც ყოველთვის სიმართლეს ამბობენ, მატყუარები, რომლებიც ყოველთვის იტყუებიან, და ცხოველები, რომლებიც არ ლაპარაკობენ. ერთხელ პანდორას შვიდ მაცხოვრებელს შორის გაიმართა შემდეგი დიალოგი:

A: "B და D - მატყუარებია"

B: "პანდორაზე ცხოვრობენ თეთრი ლომები"

C: "ჩვენ შვიდს შორის ზუსტად ორი რაინდია"

D: "პანდორაზე არ არის არც თეთრი ლომები, არც მწვანე ვეფხვები"

E: "მე და A - ორივე მატყუარები ვართ"

F: "პანდორაზე უფრო მეტი მწვანე ვეფხვია, ვიდრე ოქროს მარტორქა"

G: "ჩვენ შვიდს შორის ზუსრად 5 მატყუარაა"

დაადგინეთ, ცხოვრობს თუ არა პანდორაზე ოქროს მარტორქები.

8. ძაღლიშვილების გვარი დააარსა ვინმე ტიმოთე ძაღლიშვილმა. ცნობილია, ამ გვარის მამაკაცებიდან არცერთი არ გარდაცვლილა 30 წლამდე. ნებისმიერ მამაკაცს ჰყავდა 2 ან 3 ვაჟიშვილი, თანაც ყველა იბადებოდა, როდესაც მამა უკვე გახდებოდა 25 წლის, მაგრამ ჯერ არ მიაღწევდა 30 წლის ასაკს. დღეს (2017 წელს) ძაღლიშვილების გვარი ითვლის 125 მამაკაცს (გადრაცვლილები არ ითვლება). რომელ საუკუნეში დაიბადა ტიმოთე ძაღლიშვილი?

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა

"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"

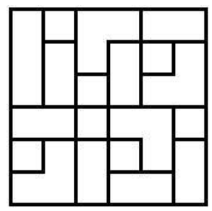
სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

2017 - 2018 წწ. I ტური

6 კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბუთეთ

1. აჩვენეთ, როგორ გავჭრათ ეს კვადრატი ოთხ ერთნაირი ფორმისა და ზომის ნაწილად, თუ გაჭრა შეიძლება მხოლოდ აღნიშნული ხაზებით.



2. სათამაშოების მაღაზიაში იყიდებოდა ლურჯი მანქანები, ლურჯი ავტობუსები, ლურჯი გემები და მწვანე მატარებლები. როდესავ მიშიკომ იყიდა რამდენიმე სათამაშო, მან აღმოაჩინა, რომ ნაყიდი ლურჯი სათამაშოების ნახევარი მანქანებია, ხოლო სახმელეთო ტრანსპორტის ნახევარი ავტობუსებია. რამდენი გემი იყიდა მიშიკომ?

3. როდესაც ანდრია სახლში მარტო დარჩა, მან დაიწყო წვეთების დათვლა, რომლებიც დროის თანაბარი ინტერვალით წვეთავდნენ თითქმის დახურული ონკანიდან. პირველსა და ბოლოსწინა დაწვეთებებს შორის 48 წუთი გავიდა, ხოლო მეხუთე და ბოლო დაწვეთბებს შორის 44 წუთი. სულ რამდენი დაწვეთება დათვალა ანდრიამ?

4. შეიძლება თუ არა 5 სტრიქონიან და 6 სვეტიან ცხრილში ჩავწეროთ რიცხვები 1-დან 30-მდე (თითო თითოჯერ) ისე, რომ რიცხხვების ჯამი ნებისმიერ სვეტში იყოს ნაკლები, ვიდრე ნევისმიერ სტრიქონში?

5. ნატურალურ რიცხვს დავარქვათ კარგი, თუ მის ჩაწერაში გამოყენებული ციფრები მეორდება ორჯერ მაინც (მაგ., 1522521 - კარგი რიცხვია, ხოლო 1522522 - არა). რამდენი არსებობს ოთხნიშნა კარგი რაცხვი, რომლის ჩაწერაში "0" არ გამოიყენება?

6. მართკუთხა ფურცელი ზომით 210 მმ × 297 მმ უნდა მთლიანად დავჭრათ ტოლი ზომის მართკუთხედებად ისე, რომ მათი სიგრძე იყოს ორჯერ მეტი სიგანეზე. რა უდიდესი ფართობის მართკუთხედები შეიძლება მივიღოთ. დაადასტურეთ, რომ ეს ზომა უდიდესია.

7. ძაღლიშვილების გვარი დააარსა ვინმე ტიმოთე ძაღლიშვილმა. ცნობილია, ამ გვარის მამაკაცებიდან არცერთი არ გარდაცვლილა 30 წლამდე. ნებისმიერ მამაკაცს ჰყავდა 2 ან 3 ვაჟიშვილი, თანაც ყველა იბადებოდა, როდესაც მამა უკვე გახდებოდა 25 წლის, მაგრამ ჯერ არ მიაღწევდა 30 წლის ასაკს. დღეს (2017 წელს) ძაღლიშვილების გვარი ითვლის 125 მამაკაცს (გადრაცვლილები არ ითვლება). რომელ საუკუნეში დაიბადა ტიმოთე ძაღლიშვილი?

8. ერთ-ერთ პარკში იზრდება ბამბუკი, რომელიც ყოველ ღამეს იზრდება ერთსა და იგივე ზომით. მებაღე ყოველდღიურად აჭრის მას მეტრების მთელ რაოდებობას ისე, რომ დარჩენილი სიმაღლე არ აღემატებოდეს 1 მეტრს და გადაჭრილი ნაწილის ზომას იწერს სპეციალურ რვეულში.

ა) შესაძლებელია თუ არა, რომ 10 მიმდევრობითი დღის განმავლობაში ამ რვეულში იყოს ჩაწერილი რიცხვები: 7; 7; 7; 6; 7; 7; 6; 7; 7; 7 (ზუსტად ამ მიმდევრობით)?

ბ) შესაძლებელია თუ არა, რომ 10 მიმდევრობითი დღის განმავლობაში ამ რვეულში იყოს ჩაწერილი რიცხვები: 7; 7; 7; 6; 7; 6; 7; 7; 6; 7 (ზუსტად ამ მიმდევრობით)?

ორივე შემთხვევაში პასუხი დაასაბუთეთ.

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა

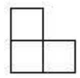
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"

სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

2017 - 2018 წწ.   I ტური

7კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბუთეთ

1. აჩვენეთ, როგორ ამოვჭრათ 12 ცალი სამუჯრიანი კუთხე (იხ. ნახატი) დაფიდან 8 × 8 ისე, რომ დაფის დარჩენილ ნაწილიდან მეტი არცერთი კუთხის ამოჭრა აღარ მოხერხდეს. შესაძლებელია კუთხეების ამოტრიალება. 

2. მოიფიქრეთ ისეთი 7 სხვადასხვა ნატურალური რიცხვი, რომ მათი ჯამი იყოს მათივე უმცირესი საერთო ჯერადის ტოლი.

3. ABCD კვადრატის CD გვერდზე აღებულია E წერტილი. EAB და EAD კუთხეების ბისექტრისები კვეთენ BC და CD გვერდებს შესაბამისად M და N წერტილებში. AE სხივზე აღებულია F წერტილი ისე, რომ AF = AB. დაამტკიცეთ, რომ F წერტილი მდებარეობს MN წრფეზე.

4. ნატურალურ რიცხვს დავარქვათ კარგი, თუ მის ჩაწერაში გამოყენებული ციფრები მეორდება ორჯერ მაინც (მაგ., 1522521 - კარგი რიცხვია, ხოლო 1522522 - არა). რამდენი არსებობს ხუთნიშნა კარგი რაცხვი, რომლის ჩაწერაში "0" არ გამოიყენება?

5. ორი უკვეცი წილადის m/n და p/q მედიანტათ დავარქვათ უკვეცი წილადი (m+p)/(n+q). ვთქვათ, z არის x და y-ს მედიანტა, u არის x და z-ს მედიანტა, v არის y და z-ს მედიანტა. შეიძლება თუ არა იმის მტკიცება, რომ z იქნება u და v-ს მედიანტა?

6. ამ ცხრილში 12 რიცხვი ლურჯად შეღებეს, სხვა 12 - წითლად, თანაც ისე, რომ "ლურჯი" რიცხვების ჯამი 4-ჯერ მეტია "წითელი" რიცხვების ჯამზე. რომელი რიცხვი დარჩა შეუღებავი?

5	11	7	12	1
34	13	2	22	17
24	51	9	51	19
16	32	10	20	42
27	2017	67	99	100

7. ერთ-ერთ პარკში იზრდება ბამბუკი, რომელიც ყოველ ღამეს იზრდება ერთსა და იგივე ზომით. მებაღე ყოველდღიურად აჭრის მას მეტრების მთელ რაოდებობას ისე, რომ დარჩენილი სიმაღლე არ აღემატებოდეს 1 მეტრს და გადაჭრილი ნაწილის ზომას იწერს სპეციალურ რვეულში.

ა) შესაძლებელია თუ არა, რომ 10 მიმდევრობითი დღის განმავლობაში ამ რვეულში იყოს ჩაწერილი რიცხვები: 7; 7; 7; 6; 7; 7; 6; 7; 7; 7 (ზუსტად ამ მიმდევრობით)?

ბ) შესაძლებელია თუ არა, რომ 10 მიმდევრობითი დღის განმავლობაში ამ რვეულში იყოს ჩაწერილი რიცხვები: 7; 7; 7; 6; 7; 6; 7; 7; 6; 7 (ზუსტად ამ მიმდევრობით)?

ორივე შემთხვევაში პასუხი დაასაბუთეთ.

8. კვადრატული ფორმის ტყე დაყოფილია მილიონ ტოლ კვადრატზე ისე, რომ თითოეულის ცენტრში იზრდება ხე. შესაძლებელია ზოგიერთი ხის მოჭრა - მაშინ მის ადგილზე რჩება ჯირკი. ამბობენ, რომ ერთი ჯირკიდან შეიძლება დავინახოთ მეორე, თუ მათ შემაერთებელ მონაკვეთზე ხე არ იზრდება (ჯირკი შეიძლება). ხეების რა უდიდესი რაოდენობა შეიძლება მოიჭრას, რომ არცერთი ჯირკიდან არ შეიძლებოდეს არცერთი სხვა ჯირკის დანახვა? ჩათვალეთ, რომ ხეებსა და ჯირკებს სისქე არ გააჩნიათ.

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა

"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"

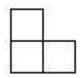
სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

2017 - 2018 წწ. I ტური

8 კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბეთეთ

1. აჩვენეთ, როგორ ამოვჭრათ 12 სამუჯრიანი კუთხე (იხ. ნახატი) დაფიდან 8 × 8 ისე, რომ დაფის დარჩენილ ნაწილიდან მეტი არცერთი კუთხის ამოჭრა აღარ მოხერხდეს. შესაძლებელია კუთხეების ამოტრიალება.



2. ABCD კვადრატის CD გვერდზე აღებულია E წერტილი. EAB და EAD კუთხეების ბისექტრისები კვეთენ BC და CD გვერდებს შესაბამისად M და N წერტილებში. AE სხივზე არებულია F წერტილი ისე, რომ AF = AB. დაამტკიცეთ, რომ F წერტილი მდებარეობს MN წრფეზე.

3. ნატურალურ რიცხვს დავარქვათ კარგი, თუ მის ჩაწერაში გამოყენებული ციფრები მეორდება ორჯერ მაინც (მაგ., 1522521 - კარგი რიცხვია, ხოლო 1522522 - არა). რამდენი არსებობს ექვსნიშნა კარგი რაცხვი, რომლის ჩაწერაში "0" არ გამოიყენება?

4. ერთ-ერთ ქვეყანაში გამოიყენება სტანდარტული ფორმის კვადრატული ფურცლები, რომლებსაც ასე აღწერენ: "K0 ფორმატის ფურცლის გვერდი 1 მ-ია. თუ K0 ფურცელში ჩავხაზავთ წრეს და ამ წრეში ისევ ჩავხაზავთ კვადრატს, მისი ფორმატი იქნება K1. თუ K1-ში ჩავხაზავთ წრეს და ამ წრეში ისევ ჩავხაზავთ კვადრატს, მისი ფორმატი იქნება K2. და ა.შ. K10 ფორმატამდე." პეტრე ესტუმრა ამ ქვეყანას და იყიდა ერთი ლურჯი ფურცელი K0 ფორმატის და თითო-თითო თეთრი ფურცლები K1, K2, …, K10 ფორმატის. შეძლებს თუ არა პეტრე გაჭრას თეთრი ფურცლები ისე, რომ მთლიანად დაფაროს ლურჯი ფურცელი ერთი მხრიდან?

5. ამ ცხრილში 12 რიცხვი ლურჯად შეღებეს, სხვა 12 - წითლად, თანაც ისე, რომ "ლურჯი" რიცხვების ჯამი 4-ჯერ მეტია "წითელი" რიცხვების ჯამზე. რომელი რიცხვი დარჩა შეუღებავი?

5	11	7	12	1
34	13	2	22	17
24	51	9	51	19
16	32	10	20	42
27	2017	67	99	100

6. კვადრატული ფორმის ტყე დაყოფილია მილიონ ტოლ კვადრატზე ისე, რომ თითოეულის ცენტრში იზრდება ხე. შესაძლებელია ზოგიერთი ხის მოჭრა - მაშინ მის ადგილზე რჩება ჯირკი. ამბობენ, რომ ერთი ჯირკიდან შეიძლება დავინახოთ მეორე, თუ მათ შემაერთებელ მონაკვეთზე ხე არ იზრდება (ჯირკი შეიძლება). ხეების რა უდიდესი რაოდენობა შეიძლება მოიჭრას, რომ არცერთი ჯირკიდან არ შეიძლებოდეს არცერთი სხვა ჯირკის დანახვა? ჩათვალეთ, რომ ხეებსა და ჯირკებს სისქე არ გააჩნიათ.

7. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a\,(b-c+1) = b^2 - bc + c \\ b(c-a+1) = c^2 - ca + a \\ c(a-b+1) = a^2 - ab + b \end{cases}$$

8. როგორი n>1 მოიძებნება n სხვადასხვა ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ მათი ჯამი იყოს მათივე უმცირესი საერთო ჯერადის ტოლი.

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"
სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
2017 - 2018 წწ. I ტური
9 კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბუთეთ

1. სათამაშოების მაღაზიაში იყიდებოდა ლურჯი მანქანები, ლურჯი ავტობუსები, ლურჯი გემები და მწვანე მატარებლები. როდესაც მიშიკომ იყიდა რამდენიმე სათამაშო, მან აღმოაჩინა, რომ ნაყიდი ლურჯი სათამაშოების ნახევარი მანქანებია, ხოლო სახმელეთო ტრანსპორტის ნახევარი ავტობუსებია. რამდენი გემი იყიდა მიშიკომ?

2. ორი უკვეცი წილადის m/n და p/q მედიანტად დავარქვათ უკვეცი წილადი $(m+p)/(n+q)$. მოიყვანეთ 9 სხვადასხვა უკვეცი წილადის მაგალითი, რომ ნებისმიერი წილადი (ორი განაპირა წილადის გარდა) ყოფილიყო ორი მეზობელი წილადის მედიანტა (ზრდადობის მიხედვით).

3. შეიძლება თუ არა აღვნიშნოთ სიბრტყეზე 5 ერთ წრფეზე არამდებარე წერტილი ისე, რომ მანძილი ნებისმიერ ორ შორის გამოისახებოდეს მთელი რიცხვით?

4. ნატურალურ რიცხვს დავარქვათ კარგი, თუ მის ჩაწერაში გამოყენებული ციფრები მეორდება ორჯერ მაინც (მაგ., 1522521 - კარგი რიცხვია, ხოლო 1522522 - არა). რამდენი არსებობს შვიდნიშნა კარგი რაცხვი, რომლის ჩაწერაში "0" არ გამოიყენება?

5. ABC - მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედია A მართი კუთხით. AB და AC გვერდებზე ABC სამკუთხედის გარეთ აგებულია ტოლი მახვილკუთხა სამკუთხედები ABP და ACQ ($PB = AQ$). PB და CQ წრფეები იკვეთებიან M წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ

ა) $PA \perp QC$

ბ) $MA \perp PQ$.

6. S(n)-ით აღვნიშნოთ ნატურალური რიცხვი n-ის ციფრთა ჯამი. რამდენი ამონახსნი აქვს განტოლებას:

$$S(n) + S^2(n) + \ldots + S^{2016}(n) = 2017^{2017}$$

სადაც $S^2(n) = S(S(n))$, $S^3(n) = S(S^2(n))$, $S^4(n) = S(S^3(n))$ და ა.შ.

7. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a\,(b - c + 1) = b^2 - bc + c \\ b(c - a + 1) = c^2 - ca + a \\ c(a - b + 1) = a^2 - ab + b \end{cases}$$

8. რიცხვითი ღერძის წერტილები შეხებილია ოთხფრად. ლუწი რიცხვების შესაბამისი წერტილები შავია, კენტი რიცხვების - თეთრია, ინტერვალებზე შავიდან თეთრამდე (ზრდადობით) შეღებილია წითლად, ხოლო ინტერვალებზე თეთრიდან შავამდე - ლურჯად. საწყის მომენტში ორი ჭრიჭინა ზის სხვადასხვა A და B წერტილებში ინტერვალში 0-დან 1-მდე. დროის ყოველ ერთეულის შემდეგ ორივე ჭრიჭინა გადახტის წერტილში, რომელიც აორმაგებს მის წინა კოორდინატს (პირველი წერტილებში 2A, 4A, 8A და ა.შ., მეორე წერტილებში 2B, 4B, 8B და ა.შ.). შეიძლება თუ არა, რომ დროის რაღაცა მომენტში ჭრიჭინები აღმოჩნდნენ სხვადასხვაფრად შეღებილ წერტილებში?

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა

"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"

სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

2017 - 2018 წწ. I ტური

10 კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბეთეთ

1. მართკუთხა ფურცელი ზომით 210 მმ × 300 მმ უნდა მთლიანად დავჭრათ ტოლი ზომის მართკუთხედებად ისე, რომ მათი სიგრძე იყოს ორჯერ მეტი სიგანეზე. რა უდიდესი ფართობის მართკუთხედები შეიძლება მივიღოთ. დაამტკიცეთ, რომ ეს ზომა უდიდესია.

2. შეიძლება თუ არა აღვნიშნოთ სიბრტყეზე 5 ერთ წრფეზე არამდებარე წერტილი ისე, რომ მანძილი ნებისმიერ ორ შორის გამოისახებოდეს მთელი რიცხვით?

3. პანდორას პლანეტაზე ცხოვრობენ რაინდები, რომლებიც ყოველთვის სიმართლეს ამბობენ, მატყუარები, რომლებიც ყოველთვის იტყუებიან, და ცხოველები, რომლებიც არ ლაპარაკობენ. ერთხელ პანდორას შვიდ მაცხოვრებლებს შორის გაიმართა შემდეგი დიალოგი:

   A: "B და D - მატყუარებია"

   B: "პანდორაზე ცხოვრობენ თეთრი ლომები"

   C: "ჩვენ შვიდს შორის ზუსტად ორი რაინდია"

   D: "პანდორაზე არ არის არც თეთრი ლომი, არც მწვანე ვეგხვი"

   E: "მე და A - ორივე მატყუარები ვართ"

   F: "პანდორაზე უფრო მეტი მწვანე ვეფხვია, ვიდრე ოქროს მარტორქა"

   G: "ჩვენ შვიდს შორის ზუსრად 5 მატყუარაა"

   დაადგინეთ, ცხოვრობს თუ არა პანდორაზე ოქროს მარტორქა.

4. თამაშში "რა? სად? როდის?" გამოიყენება მრგვალი ბორბალი, რომელიც დაყოფილია 13 სექტორად. დასაწყისში თითოეულ სექტორში დევს კითხვა. ისარი, რომელიც ბრუნავს შემთვევითი პრინციპით, თანაბარი ალბათობით ჩერდება ნებისმიერ სექტორში. თუ ამ სექტორის კითხვა უკვე გათამაშებულია, დასმული იქნება კითხვა მეზობელ სექტორიდან საათის ისრის მიმართულებით.

დავნომროთ კიტხვები 1-დან 13-მდე საათის ისრის მიმართულებით. დავუშვათ, რამდენიმე რაუნდის შემდეგ დაისვა კითხვები 3, 4, 5, 6, 8, 9 და 10. რომელ კითხვას აქვს გათამაშების ყველაზე მაღალი ალბათობა მომავალ ორი რაუნდიდან ერთ-ერთში (ორივე აუცილებლად გათამაშდება)?

5. O - ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის ცენტრია. წრეწირი, რომელიც გადის A და O წერტილებში, კვეტს AB და AC გვერდებს შესაბამისად M და N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ AN = BM.

6. როგორ იცვლება $x^2 + p = \sqrt{x - p}$ განტოლების ფესვების რაოდენობა p პარამეტრის მნიშვნელობაზე დამოკიდებულებით.

7. რიცხვითი ღერძის წერტილები 4-ფრად შეხებილია. ლუწი რიცხვების შესაბამისი წერტილები შავია, კენტი რიცხვების - თეთრია, ინტერვალებზე შავიდან თეთრამდე (ზრდადობით) შეღებილია წითლად, ხოლო ინტერვალებზე თეთრიდან შავამდე - ლურჯად. საწყის მომენტში ორი ჭრიჭინა ზის სხვადასხვა A და B წერტილებში ინტერვალში 0-დან 1-მდე. დროის ყოველ ერთეულის შემდეგ ორივე ჭრიჭინა გადახტის წერტილში, რომელიც ააორმაგებს მის წინა კოორდინატს (პირველი წერტილებში 2A, 4A, 8A და ა.შ., მეორე წერტილებში 2B, 4B, 8B და ა.შ.). შეიძლება თუ არა, რომ დროის რაღაცა მომენტში ჭრიჭინები აღმოჩნდნენ სხვადასხვა ფრად შეღებილ წერტილებში?

8. a და b ისეთი ნამდვილი რიცხებია, რომ $a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$

დაამტკიცეთ, რომ $4a^2 + 4b^2 - ab \geq 30$

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა

"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"

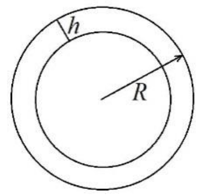
სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

2017 - 2018 წწ. I ტური

11 კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბუთეთ

1. მრგვალი ფორმის გვირაბს აქვს გარე რადიუსი R = 200 m და სიგანე h = 30 m (იხ. ნახატი). შესაძლებელია თუ არა ჩამოვკიდოთ მასში 6 ნათურა ისე, რომ განათდეს მთელი გვირაბი?



2. შესაძლებელია თუ არა, რომ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი 100 წევრიდან ზუსტად 42 იყოს მთელი რიცხვი?

3. თამაშში "რა? სად? როდის?" გამოიყენება მგრვალი ბორბალი, რომელიც დაყოფილია 13 სექტორად. დასაწყისში თითოეულ სექტორში დევს კითხვა. ისარი, რომელიც ბრუნავს შემთვევითი პრინციპით, თანაბარი ალბათობით ჩერდება ნებისმიერ სექტორში. თუ ამ სექტორის კითხვა უკვე გათამაშებულია, დასმული იქნება კითხვა მეზობელ სექტორიდან საათის ისრის მიმართულებით.

დავნომროთ კიტხვები 1-დან 13-მდე საათის ისრის მიმართულებით. დავუშვათ, რამდენიმე რაუნდის შემდეგ დაისვა კითხვები 3, 4, 5, 6, 8, 9 და 10. რომელ კითხვას აქვს გათამაშების ყველაზე მაღალი ალბათობა მომავალ ორი რაუნდიდან ერთ-ერთში (ორივე აუცილებლად გათამაშდება)?

4. O - ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის ცენტრია. წრეწირი, რომელიც გადის A და O წერტილებში, კვეტს AB და AC გვერდებს შესაბამისად M და N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ AN = BM.

5. იპოვეთ რომელიმე არამუდმივი მრავალწევრი P(t) ისეთი, რომ P(sinx) = P(cosx).

6. რიცხვითი ღერძის წერტილები ოთხფრად შეხებილია. ლუწი რიცხვების შესაბამისი წერტილები შავია, კენტი რიცხვების - თეთრია, ინტერვალებზე შავიდან თეთრამდე (ზრდადობით) შეღებილია წითლად, ხოლო ინტერვალებზე თეთრიდან შავამდე - ლურჯად. საწყის მომენტში ორი ჭრიჭინა ზის სხვადასხვა A და B წერტილებში ინტერვალში 0-დან 1-მდე. დროის ყოველ ერთეულის შემდეგ ორივე ჭრიჭინა გადახტის წერტილში, რომელიც აორმაგებს მის წინა კოორდინატს (პირველი წერტილებში 2A, 4A, 8A და ა.შ., მეორე წერტილებში 2B, 4B, 8B და ა.შ.). შეიძლება თუ არა, რომ დროის რაღაცა მომენტში ჭრიჭინები აღმოჩნდნენ სხვადასხვაფრად შეღებილ წერტილებში?

7. მოცემულია წესიერი პრიზმა და წესიერი ბიპირამიდა (პირამიდა და სარკისებულად მიდებული მის ფუძეზე ასეთივე პირამიდა). ორივეს ფუძედ აქვთ წესიერი 25-კუთხედი. ორივე სხეულისთვის დათვლილია მრავალკუთხედის წვეროების მაქსიმალურად შესაძლო რაოდენობა, რომელიც გამოდის სიბრტყით ამ სხეულის გადაკვეთისას. რომელი სხეულისათვის ეს შედეგი უფრი დიდია?

8. a და b ისეთი ნამდვილი რიცხებია, რომ $a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$

დაამტკიცეთ, რომ $4a^2 + 4b^2 - ab \geq 30$