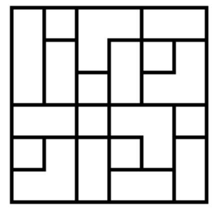
Olympiade mathématique internationale
≪ Formule de l'unité ≫ / ≪ Troisième millénaire ≫

Année 2017/2018. Tour de séléction.

Problèmes pour le niveau R5

1. Découpez ce carré en 4 parts superposable en suivant les lignes tracées.



2. Existe-t-il trois entiers naturels consécutifs qui sont des multiples de trois autres entiers consécutifs (dans le même ordre)? Autrement dit, existe-t-il deux entiers naturels distincts a et b, tels que a est un multiple de b, $a+1$ est un multiple de $b+1$ et $a+2$ est un multiple de $b+2$?
3. Dans un magasin de jouets il y a des voitures bleues, des bus bleus, des bateaux bleus et des trains verts. Romain a acheté quelque jouets et s'est apperçu que la moitié de jouets bleus qu'il a achetés sont des voitures et la moitiè de moyen de transport terrestre (voitures, bus et trains) sont des bus. Combien de bateaux a-t-il achetés?
4. André compte les gouttes l'eau qui tombent d'un robinet mal fermé à des intervales réguliers. Entre la première et avant-dernière goutte 48 minutes ont passé. Et entre la cinquième et la dernière seulement 44 minutes. Combien de gouttes d'eau André a-t-il comptés?
5. On dit qu'un nombre est **bon** si chaque chiffre qui apparait dans son écriture y apparait au moins deux fois (par exemple, 1522521 est bon et 1522522 ne l'est pas). Combien de bons nombres à 3 chiffres qui n'ont pas de 0 dans leur écriture existe-t-il?
6. On veut découper une feuille rectangulaire de dimension 210 $mm \times 300$ mm en plusieurs rectangles de même taille ayant la longeur deux fois plus grande que la largeur. Quel peut être l'aire maximale d'un tel rectangle? Justifiez.
7. Sur la planète Pandora il y a trois sortes d'habitants: les vériteurs (qui ne mentent jamais), les menteurs (qui mentent toujours) et les animaux (qui ne disent rien). Une fois 7 habitants de Pandora (A, B, C, D, E, F, G) se sont mis ensemble et chacun a dit:
   A: ≪ B et D sont des menteurs. ≫
   B: ≪ Il y a des lions blancs sur Pandora. ≫
   C: ≪ Il y a exactement deux vériteurs parmi nous. ≫
   D: ≪ Il n'y a pas de lions blancs ni de lions verts sur Pandora. ≫
   E: ≪ A et moi sommes menteurs, tous les deux. ≫
   F: ≪ Il y a plus de tigres verts que de rhinocécos doré sur Pandora. ≫
   G: ≪ Il y a exactement 5 menteurs parmi nous. ≫
   Y a-t-il de rhinocéros doré sur Pandora?
8. Le clan McDog a commencé avec un certain Tim McDog. Depuis aucun homme du clan n'est mort avant l'âge de 30 ans. Chaque homme a eu deux ou trois fils, et tous les enfants sont nés quand le père avait au moins 25 ans mais moins de 30 ans.

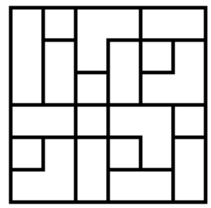
   En ce moment il y a 125 hommes en vie dans le clan de McDog. Dans quel siècle est né Tim McDog?

Olympiade mathématique internationale
« Formule de l'unité » / « Troisième millénaire »

Année 2017/2018. Tour de séléction.

Problèmes pour le niveau R6

1. Découpez ce carré en 4 parts superposable en suivant les lignes tracées.



2. Dans un magasin de jouets il y a des voitures bleues, des bus bleus, des bateaux bleus et des trains verts. Romain a acheté quelque jouets et s'est apperçu que la moitié de jouets bleus qu'il a achetés sont des voitures et la moitiè de moyen de transport terrestre (voitures, bus et trains) sont des bus. Combien de bateaux a-t-il achetés?
3. André compte les gouttes l'eau qui tombent d'un robinet mal fermé à des intervales réguliers. Entre la première et avant-dernière goutte 48 minutes ont passé. Et entre la cinquième et la dernière seulement 44 minutes. Combien de gouttes d'eau André a-t-il comptés?
4. Est-il possible de placer tous les nombres de 1 à 30 dans un tableau à 5 lignes et 6 colonnes de sorte que la somme des nombres dans chaque colonne soit plus petite que la somme des nombres dans chaque ligne?
5. On dit qu'un nombre est **bon** si chaque chiffre qui apparait dans son écriture y apparait au moins deux fois (par exemple, 1522521 est bon et 1522522 ne l'est pas). Combien de bons nombres à 4 chiffres qui n'ont pas de 0 dans leur écriture existe-t-il?
6. On veut découper une feuille rectangulaire 210 $mm \times 297$ mm en plusieurs rectangles de même taille ayant la longeur deux fois plus grande que la largeur. Quel peut être l'aire maximale d'un tel rectangle? Justifiez.
7. Le clan McDog a commencé avec un certain Tim McDog. Depuis aucun homme du clan n'est mort avant l'âge de 30 ans. Chaque homme a eu deux ou trois fils, et tous les enfants sont nés quand le père avait au moins 25 ans mais moins de 30 ans.

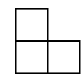
   En ce moment il y a 125 hommes en vie dans le clan de McDog. Dans quel siècle est né Tim McDog?
8. Dans le jardin d'un monastère pousse un bambou sacré. Depuis la nuit des temps, chaque nuit il pousse d'une même longueur, et chaque jour les moines coupent un nombre entier de mètres de sorte que la hauteur du bambou restant ne dépasse pas un mètre et notent la longueur du bambou coupé dans un livre spécial.
   a) Est-il possible de trouver quelque part dans ce livre les dix nombres consécutifs (c.à.d. notés pendant 10 jours consécutifs dans ce même ordre) suivants: $7, 7, 7, 6, 7, 7, 6, 7, 7, 7$?
   b) Est-il possible d'y trouver les nombres consécutifs $7, 7, 7, 6, 7, 6, 7, 7, 6, 7$?
   Justifier vos réponses.

Olympiade mathématique internationale
« Formule de l'unité » / « Troisième millénaire »

Année 2017/2018. Tour de séléction.

Problèmes pour le niveau R7

1. Découpez 12 « angles » (voir la figure ci-contre) d'un échiquier 8×8 de sorte que on ne puisse pas en découper encore un treizième du reste de l'échiquier. Les « angles » peuvent être orientés différement.



2. Trouver 7 entiers naturels distincts dont la somme est égale à leur plus grand multiple commun.
3. Le point E ce trouve sur le côté $[CD]$ du carré $ABCD$. Les bissectrices des angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{EAD}$ coupent les côtés $[BC]$ et $[CD]$ aux points M et N réspectivement. Sur la demi-droite $[AE)$ on prend un point F tel que $AF = AB$. Montrez que F appartient à la droite (MN).
4. On dit qu'un nombre est **bon** si chaque chiffre qui apparait dans son écriture y apparait au moins deux fois (par exemple, 1522521 est bon et 1522522 ne l'est pas). Combien de bons nombres à 5 chiffres qui n'ont pas de 0 dans leur écriture existe-t-il?
5. On appelle la médiante de deux fractions irréductibles $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$ l'écriture irréductible de la fraction $\frac{m+p}{n+q}$. Soit z la médiante de fractions x y, u la médiante des fractions x et z et v la médiante des fractions y et z. Est-il vrai que z est la médiante des fractions u et v?
6. Dans le tableau suivant 12 nombres ont été coloriés en bleu et 12 autres en rouge de sorte que la somme de tous les nombres bleus est 4 fois plus grande que la somme de tous les nombres rouges. Quel est le nombre qui n'a pas été colorié?

5	11	7	12	1
34	13	2	22	17
24	51	9	51	19
16	32	10	20	42
27	2017	67	99	100

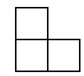
7. Dans le jardin d'un monastère pousse un bambou sacré. Depuis la nuit des temps, chaque nuit il pousse d'une même longueur, et chaque jour les moines coupent un nombre entier de mètres de sorte que la hauteur du bambou restant ne dépasse pas un mètre et notent la longueur du bambou coupé dans un livre spécial.
a) Est-il possible de trouver quelque part dans ce livre les dix nombres consécutifs (c.à.d. notés pendant 10 jours consécutifs dans ce même ordre) suivants: $7, 7, 7, 6, 7, 7, 6, 7, 7, 7$?
b) Est-il possible d'y trouver les nombres consécutifs $7, 7, 7, 6, 7, 6, 7, 7, 6, 7$?
Justifier vos réponses.
8. Un forêt est divisé en un million de petits carrés et un arbre pousse au cetre de chaque carré. Si l'on coupe un arbre, il reste une souche à la place. On dit que l'on peut voir une souche depuis une autre s'il n'y a pas d'arbres sur le segment qui joint les deux souches (cependant, il peut y avoir d'autres souches). Quel est le nombre maximal d'arbres que l'on peut couper pour que l'on ne puisse voir aucune souche depuis une autre ? On peut négliger l'épaisseur des troncs.

Olympiade mathématique internationale
« Formule de l'unité » / « Troisième millénaire »

Année 2017/2018. Tour de séléction.

Problèmes pour le niveau R8

1. Découpez 12 « angles » (voir la figure ci-contre) d'un échiquer 8×8 de sorte que on ne puisse pas en découper encore un treizième du reste de l'échiquier. Les « angles » peuvent être orientés différement.



2. Le point E ce trouve sur le côté $[CD]$ du carré $ABCD$. Les bissectrices des angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{EAD}$ coupent les côtés $[BC]$ et $[CD]$ aux points M et N réspectivement. Sur la demi-droite $[AE)$ on prend un point F tel que $AF = AB$. Montrez que F appartient à la droite (MN).
3. On dit qu'un nombre est **bon** si chaque chiffre qui apparait dans son écriture y apparait au moins deux fois (par exemple, 1522521 est bon et 1522522 ne l'est pas). Combien de bons nombres à 6 chiffres qui n'ont pas de 0 dans leur écriture existe-t-il?
4. Dans un certain pays on utilise le papier carré qui existe en plusieurs formats standard définis comme suit: une feuille de format K0 a le côté 1 m. Si on inscrit un cercle dans une feuille K0, le carré inscrit dans ce cercle a le format K1. Et ainsi de suite, jusqu'au format K10.

   Pierre a visité ce paye et il en a ramené une feuille bleue de format K0 et des feuilles blanches de format K1, K2, ..., K10 (une feuille de chaque). Peut-il découper les feuilles blanches pour recouvrir la feuille bleu entièrement (d'un seul côté) avec les morceaux obtenus?
5. Dans le tableau suivant 12 nombres ont été coloriés en bleu et 12 autres en rouge de sorte que la somme de tous les nombres bleus est 4 fois plus grande que la somme de tous les nombres rouges. Quel est le nombre qui n'a pas été colorié?

5	11	7	12	1
34	13	2	22	17
24	51	9	51	19
16	32	10	20	42
27	2017	67	99	100

6. Un forêt est divisé en un million de petits carrés et un arbre pousse au cetre de chaque carré. Si l'on coupe un arbre, il reste une souche à la place. On dit que l'on peut voir une souche depuis une autre s'il n'y a pas d'arbres sur le segment qui joint les deux souches (cependant, il peut y avoir d'autres souches). Quel est le nombre maximal d'arbres que l'on peut couper pour que l'on ne puisse voir aucune souche depuis une autre ? On peut négliger l'épaisseur des troncs.
7. Trouver toutes les solutions réelles du système suivant:

$$\begin{cases} a\,(b-c+1) = b^2 - bc + c, \\ b\,(c-a+1) = c^2 - ca + a, \\ c\,(a-b+1) = a^2 - ab + b. \end{cases}$$

8. Pour quels entiers naturels n il existe n entiers naturels distincts dont la somme est égale à leur plus grand multiple commun?

Olympiade mathématique internationale
« Formule de l'unité » / « Troisième millénaire »

Année 2017/2018. Tour de séléction.

Problèmes pour le niveau R9

1. Dans un magasin de jouets il y a des voitures bleues, des bus bleus, des bateaux bleus et des trains verts. Romain a acheté quelque jouets et s'est apperçu que la moitié de jouets bleus qu'il a achetés sont des voitures et la moitiè de moyen de transport terrestre (voitures, bus et trains) sont des bus. Combien de bateaux a-t-il achetés?
2. On appelle la médiante de deux fractions irréductibles $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$ l'écriture irréductible de la fraction $\frac{m+p}{n+q}$. Donner un exemple de 9 fractions irréductibles telles que, si on les place dans l'ordre croissant, chacune d'elle (sauf la plus grande et la plus petite) soit la médiante des ses deux voisines.
3. Peut-on trouver cinq points non alignés du plan tels que la distance entre tous ces points (deux à deux) eux soit un nombre entièr?
4. On dit qu'un nombre est **bon** si chaque chiffre qui apparait dans son écriture y apparait au moins deux fois (par exemple, 1522521 est bon et 1522522 ne l'est pas). Combien de bons nombres à 7 chiffres qui n'ont pas de 0 dans leur écriture existe-t-il?
5. Le triangle ABC est isocèle rectangle en A. Sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du $\triangle ABC$ à l'extérieur du triangle, on construit deux triangles acutangles égaux ABP et ACQ ($PB = AQ$). Les droites (PB) et (CQ) se coupent au point M. Montrez que a) $(PA) \perp (QC)$; b) $(MA) \perp (PQ)$.
6. Soit $S(n)$ la somme de chiffres d'un nombre entier naturel n. Combien de solutions a l'équation suivante:
$$S(n) + S^2(n) + \ldots + S^{2016}(n) = 2017^{2017},$$
où $S^2(n) = S(S(n))$, $S^3(n) = S(S^2(n))$, $S^4(n) = S(S^3(n))$ etc. P.ex. si $n = 9999$, $S(n) = 36$, $S^2(n) = S(36) = 9$.
7. Trouver toutes les solutions réelles du système suivant:
$$\begin{cases} a\,(b-c+1) = b^2 - bc + c, \\ b\,(c-a+1) = c^2 - ca + a, \\ c\,(a-b+1) = a^2 - ab + b. \end{cases}$$
8. Les points d'une droite graduée sont coloriés en 4 couleurs d'après la règle suivante:
— les points de coordonnées entières paires, sont noirs;
— les points de coordonnées entières impaires, sont blancs;
— les intervalles entre un point noir et un point blanc consécutifs (dans le sens de numération) sont coloriés en rouge;
— les intervalles restants sont coloriés en bleu.
On place deux sauterelles en deux points distincts entre 0 et 1. Chaque minute les deux sauterelles sautent en même temps et doublent à chaque fois leurs coordonnées (la sauterelle qui se trouvait en un point de coordonnée a saute en $2a$, puis en $4a$, puis en $8a$ etc). Peut-on affirmer qu'à un certain moment ces deux sauterelles vont se retrouver en deux points de couleur différente?

Olympiade mathématique internationale
« Formule de l'unité » / « Troisième millénaire »

Année 2017/2018. Tour de séléction.

Problèmes pour le niveau R10

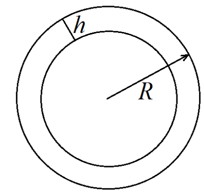
1. On veut découper une feuille rectangulaire de dimension 210 $mm \times 300$ mm en plusieurs rectangles de même taille ayant la longeur deux fois plus grande que la largeur. Quel peut être l'aire maximale d'un tel rectangle? Justifiez.
2. Peut-on trouver cinq points non alignés du plan tels que la distance entre tous ces points (deux à deux) eux soit un nombre entièr?
3. Sur la planète Pandora il y a trois sortes d'habitants: les vériteurs (qui ne mentent jamais), les menteurs (qui mentent toujours) et les animaux (qui ne disent rien). Une fois 7 habitants de Pandora (A, B, C, D, E, F, G) se sont mis ensemble et chacun a dit:
   A: « B et D sont des menteurs. »
   B: « Il y a des lions blancs sur Pandora. »
   C: « Il y a exactement deux vériteurs parmi nous. »
   D: « Il n'y a pas de lions blancs ni de lions verts sur Pandora. »
   E: « A et moi sommes menteurs, tous les deux. »
   F: « Il y a plus de tigres verts que de rhinocécos doré sur Pandora. »
   G: « Il y a exactement 5 menteurs parmi nous. »
   Y a-t-il de rhinocéros doré sur Pandora?
4. Pour choisir des questions dans un jeu on utilise une roulette de 13 secteurs de même taille. Au départ du jeu une question est posée dans chaque secteur, numérotés de 1 à 13 dans le sens de l'aiguille de la montre. Quand on fait tourner la roulette, l'aiguille montre un des treize secteurs avec la même probabilité. Si l'aiguille montre un secteur qui contient une question, c'est cette question qui est posée (et la question est retirée de la roulette, bien entendu). Si l'aiguille montre un secteur vide, on prend la question suivante qui n'a pas encore été posée dans le sens de l'aiguille de la montre.
   Supposons que les questions 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 ont été posées. Quelle est la question la plus probable dans les deux tours suivants?
5. Le point O est le centre du triangle équilatéral ABC. Une droite passant par les points A et O coupe les droites (AB) et (AC) aux points M et N réspectivement. Montrez que $AN = BM$.
6. Quel est le nombre de racines de l'équation $x^2 + p = \sqrt{x - p}$ en fonction du paramètre réel p?
7. Les points d'une droite graduée sont coloriés en 4 couleurs d'après la règle suivante:
   — les points de coordonnées entières paires, sont noirs;
   — les points de coordonnées entières impaires, sont blancs;
   — les intervalles entre un point noir et un point blanc consécutifs (dans le sens de numération) sont coloriés en rouge;
   — les intervalles restants sont coloriés en bleu.
   On place deux sauterelles en deux points distincts entre 0 et 1. Chaque minute les deux sauterelles sautent en même temps et doublent à chaque fois leurs coordonnées (la sauterelle qui se trouvait en un point de coordonnée a saute en $2a$, puis en $4a$, puis en $8a$ etc). Peut-on affirmer qu'à un certain moment ces deux sauterelles vont se retrouver en deux points de couleur différente?
8. Deux nombres réels a et b sont tels que $a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$.
   Montrer que $4a^2 + 4b^2 - ab \geqslant 30$.

Olympiade mathématique internationale
« Formule de l'unité » / « Troisième millénaire »

Année 2017/2018. Tour de séléction.

Problèmes pour le niveau R11

1. Un tunnel circulaire a le rayon extérieur $R = 200$ m et la largeur $h = 30$ m. Peut-on illuminer ce tunnel avec 6 lampadaires?



2. Est-il possible que parmi les 100 premiers termes d'une suite arithmétique exactement 42 nombres soient entiers?
3. Pour choisir des questions dans un jeu on utilise une roulette de 13 secteurs de même taille. Au départ du jeu une question est posée dans chaque secteur, numérotés de 1 à 13 dans le sens de l'aiguille de la montre. Quand on fait tourner la roulette, l'aiguille montre un des treize secteurs avec la même probabilité. Si l'aiguille montre un secteur qui contient une question, c'est cette question qui est posée (et la question est retirée de la roulette, bien entendu). Si l'aiguille montre un secteur vide, on prend la question suivante qui n'a pas encore été posée dans le sens de l'aiguille de la montre.
   Supposons que les questions 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 ont été posées. Quelle est la question la plus probable dans les deux tours suivants?
4. Le point O est le centre du triangle équilatéral ABC. Une droite passant par les points A et O coupe les droites (AB) et (AC) aux points M et N réspectivement. Montrez que $AN = BM$.
5. Trouver un polynôme $P(t)$ non constant qui vérifie $P(\sin x) = P(\cos x)$.
6. Les points d'une droite graduée sont coloriés en 4 couleurs d'après la règle suivante:
   — les points de coordonnées entières paires, sont noirs;
   — les points de coordonnées entières impaires, sont blancs;
   — les intervalles entre un point noir et un point blanc consécutifs (dans le sens de numération) sont coloriés en rouge;
   — les intervalles restants sont coloriés en bleu.
   On place deux sauterelles en deux points distincts entre 0 et 1. Chaque minute les deux sauterelles sautent en même temps et doublent à chaque fois leurs coordonnées (la sauterelle qui se trouvait en un point de coordonnée a saute en $2a$, puis en $4a$, puis en $8a$ etc). Peut-on affirmer qu'à un certain moment ces deux sauterelles vont se retrouver en deux points de couleur différente?
7. On considère un prisme regulièr et une bipyramide (un solide formé par deux pyramides identiques ayant la base commune) regulière qui ont un polygone regulièr à 25 côtés comme base. Pour chacun de ces solides on a trouvé le nombre maximal de sommets de la section par un plan. Pour lequel de ces deux solides ce nombre est plus grand?
8. Deux nombres réels a et b sont tels que $a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$.
   Montrer que $4a^2 + 4b^2 - ab \geqslant 30$.