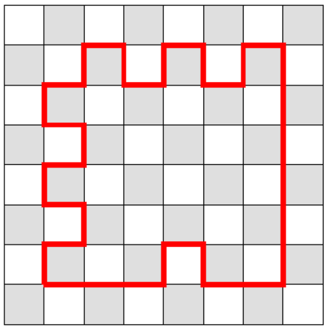
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Задачи для 5 класса



1. Разрежьте шахматную доску по клеточкам на две фигуры так, что в первой фигуре на 4 клетки больше, чем во второй, но во второй фигуре на 4 чёрных клетки больше, чем в первой. Обе фигуры должны быть связными, то есть не должны распадаться на части.

Решение. Например, так.

2. Известно, что в понедельник маляр красил вдвое медленнее, чем во вторник, среду и четверг, а в пятницу — вдвое быстрее, чем в эти три дня, но работал 6 часов вместо 8. В пятницу он покрасил на 300 метров забора больше, чем в понедельник. Сколько метров забора маляр покрасил с понедельника по пятницу?

Решение. Примем за 100% длину забора, которую маляр красил во вторник, среду и четверг. Тогда на понедельник приходится 50%, а на пятницу – 150%. Значит, 300 метров забора соответствуют 150%–50%=100%. За всю неделю (с понедельника по пятницу) – 500%, т.е. **1500 метров**.

3. Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых все цифры различны, первая цифра делится на 2, а сумма первой и последней цифр — делится на 3.

Решение. Первая цифра может быть 2, 4, 6 или 8. Если первая 2, то последняя 1,4,7; если первая 4, то последняя 2,5,8; если первая 6, то последняя 0,3,(6 не подходит),9; если первая 8, то последняя 1,4,7. Итого 3+3+3+3=12 вариантов для первой и последней цифр. Для каждого из этих вариантов существует 8·7 способов выбрать две средних цифры. Итого 56·12=672 способа.

4. В семье Олимпионовых принято особо отмечать день, когда человеку исполняется столько лет, какова сумма цифр его года рождения. У Коли Олимпионова такой праздник настал в 2013 году, а у Толи Олимпионова — в 2014. Кто из них старше и на сколько лет?

Решение. Определим, в каком году может родиться человек, если при прибавлении к году рождения суммы его цифр получается 2013 или 2014. Ясно, что номер такого года не более 2014. Поскольку у каждого из чисел от 1 до 2014 сумма цифр не превышает 1+9+9+9=28, то номер года рождения не меньше 2013-28=1985. Перебрав все годы от 1985 до 2013, обнаружим, что Коля мог родиться в 1992 или 2010 годах, а Толя в 1988 или в 2006.

Поэтому возможны варианты: Толя старше на 4 года; Толя старше на 22 года; Коля старше на 14 лет. (В ответе нужно указать **все** эти варианты)

5. Карлсон купил в буфете несколько блинов (по 25 рублей за штуку) и несколько банок мёда (по 340 рублей за штуку). Когда он сообщил Малышу, какую сумму потратил в буфете, тот сумел только на основании этой информации определить, сколько банок мёда и сколько блинов купил Карлсон. Могла ли эта сумма превысить 2000 рублей?

Решение. Могла. Например, пусть Карлсон потратил $4 \cdot 340+25 \cdot 40=2360$ рублей. Предположим, что Карлсон может набрать такую сумму ещё каким-нибудь способом; для этого он должен потратить на блины на x рублей меньше, а на мёд на x рублей больше (или наоборот). Но тогда за x рублей можно купить как целое число блинов, так и целое число горшочков с мёдом. Значит, x делится на 25 и на 340. Но минимальный такой x равен 1700; однако Карлсон не может потратить на 1700 рублей меньше ни на мёд, ни на блины.

6. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталось больше всего золота — 30 кг — и пятая часть всего серебра. Сколько золота было в кладе?

Решение. 1) Старший брат получил 70 кг серебра, что является пятой частью общего количества; значит, общая масса серебра равна 350 кг.

2) Остальные получили больше серебра, чем старший, т.е. каждый — больше 70 кг. Если братьев хотя бы пятеро, то в сумме они получат больше 350 кг; значит, братьев не больше чем четверо.

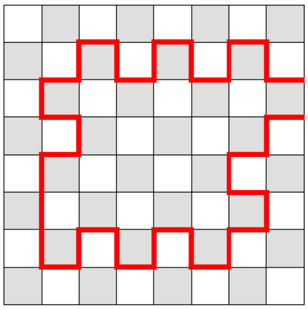
3) Но хотя бы четверо их должно быть, т.к. масса серебра превышает 300 кг. Значит, братьев четверо.

4) Общая масса клада 400 кг, поэтому масса золота 400-350=50 кг.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Задачи для 6 класса



1. Разрежьте шахматную доску по клеточкам на две фигуры так, что в первой фигуре на 6 клеток больше, чем во второй, но во второй фигуре на 6 чёрных клеток больше, чем в первой. Обе фигуры должны быть связными, то есть не должны распадаться на части.

Решение. Например, так. (Ср. задачу 5.1).

2. В семье Олимпионовых принято особо отмечать день, когда человеку исполняется столько лет, какова сумма цифр его года рождения. У Коли Олимпионова такой праздник настал в 2013 году, а у Толи Олимпионова — в 2014. Кто из них старше и на сколько лет?

Решение и критерии. См. задачу 5.4.

3. Найдите количество таких пятизначных чисел, у которых все цифры различны, первая цифра делится на 2, а сумма первой и последней цифр — делится на 3.

Решение. Первая цифра может быть 2, 4, 6 или 8. Если первая 2, то последняя 1,4,7; если первая 4, то последняя 2,5,8; если первая 6, то последняя 0,3,(6 не подходит),9; если первая 8, то последняя 1,4,7. Итого 3+3+3+3=12 вариантов для первой и последней цифр. Для каждого из этих вариантов существует 8·7·6=336 способов выбрать две средних цифры. Итого 336·12=4032 способа.

4. В начале года американский доллар стоил 80 европейских центов. Эксперт дал прогноз, что в течение года курс евро по отношению к рублю вырастет на 8% (то есть за 1 евро можно будет купить на 8% рублей больше, чем в начале года), а курс доллара по отношению к рублю упадёт на 10%. Если прогноз сбудется, то сколько американских центов будет стоить евро в конце года?

Решение. Выберем сумму в рублях, которой в конце года будет соответствовать 1 евро (т.е. 100 европейских центов). В начале года ей же соответствовали 108 европейских центов или 108·100/80=135 американских центов. Следовательно, в конце года ей будут соответствовать 135·100/90=**150 американских центов**.

5. Карлсон купил в буфете несколько блинов (по 25 рублей за штуку) и несколько банок мёда (по 340 рублей за штуку). Когда он сообщил Малышу, какую сумму потратил в буфете, тот сумел только на основании этой информации определить, сколько банок мёда и сколько блинов купил Карлсон. Могла ли эта сумма превысить 2000 рублей?

Решение и критерии. См. задачу 5.5.

6. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталось больше всего золота — 30 кг — и пятая часть всего серебра. Сколько золота было в кладе?

Решение и критерии. См. задачу 5.6.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Задачи для 7 класса

1. Мила и Женя придумали по числу и выписали на доску все натуральные делители своих чисел. Мила написала 10 чисел, Женя выписала 9 чисел, а максимальное число, написанное на доске дважды, равно 50. Сколько всего различных чисел выписано на доске?

Решение. Заметим, что число, написанное дважды — это общий делитель исходных чисел; максимальное такое число — это их НОД. Значит, все числа, написанные дважды — делители числа 50, то есть числа 1, 2, 5, 10, 25, 50. То есть среди выписанных чисел ровно 6 повторяющихся, и количество различных чисел равно 10+9-6=13.

2. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник с периметром 36, стороны которого проходят по линиям сетки. Какую наибольшую площадь он может иметь?

Решение. Рассмотрим крайние вертикали и горизонтали. Уход с них внутрь прямоугольника не позволяет сократить периметр, но уменьшает площадь. Значит, наибольшую площадь имеет прямоугольник. Если A и B — длины его сторон, то A+B=18.

Перебирая варианты (1, 17), (2, 16) и т.д. различных прямоугольников с периметром 36, находим, что наибольшее значение площади AB достигается, когда A=B=9, и эта площадь равна 81.

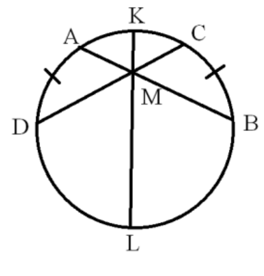
3. В окружности проведены три равных хорды, проходящие через одну точку. Докажите, что эти хорды являются диаметрами.

Решение.

Способ 1.

Пусть AB, CD, EF — три хорды, M — их точка пересечения. Докажем, что фигура, состоящая из отрезков AB и CD, симметрична относительно одного из диаметров.

Действительно, поскольку хорды AB и CD равны, то равны и дуги ACB и CAD, на которые они опираются; поскольку дуга AC общая, то дуги AD и BC тоже равны. Пусть K и L — середины дуг AC и BD, тогда AK=KC, AD=CB, DL=LB. Тогда обе дуги KL состоят из соответственно равных частей, поэтому они равны между собой и KL — диаметр. В силу равенства дуг AK и KC, DL и LB фигура симметрична относительно диаметра.



Из этого следует, что точка M лежит на указанном диаметре. Но аналогично можно доказать, что M лежит на другом диаметре, который аналогично построен для хорд AB и EF (и на третьем — для хорд CD и EF). Это всё разные диаметры, т.к. например образ хорды AB при симметрии относительно первого — CD, а относительно второго — EF.

Итак, точка M лежит одновременно на трёх диаметрах, поэтому она — центр окружности. Все три хорды проходят через центр, значит, являются диаметрами.

Способ 2 (для восьмиклассников).

Заметим, что AM+MB=CM+MD и AM·MB=CM·MD (по теореме об отрезках пересекающихся хорд). Из этого нетрудно вывести, что AM=CM и BM=DM (или наоборот). Аналогично можно рассмотреть хорды AB и EF и получить, например, что AM=EM. Тогда M — центр окружности, проходящей через точки A, C и E, т.е. центр исходной окружности.

4. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталось больше всего золота — 25 кг — и восьмая часть всего серебра. Сколько золота было в кладе?

Решение. 1) Старший брат получил 75 кг серебра, что является восьмой частью общего количества; значит, общая масса серебра равна 600 кг.

2) Остальные получили больше серебра, чем старший, т.е. каждый — больше 75 кг. Если братьев хотя бы восемь, то в сумме они получат больше 600 кг; значит, братьев не больше чем семеро.

3) Но хотя бы семеро их должно быть, т.к. масса серебра 600 кг, а значит, масса всего клада больше 600 кг. Значит, братьев семеро.

4) Общая масса клада 700 кг, поэтому масса золота 700-600=100 кг.

5. Три человека хотят приехать из города *A* в город *B*, расположенный в 45 километрах от *A*. У них есть два велосипеда. Скорость велосипедиста 15 км/ч, пешехода — 5 км/ч. За какое минимальное время они смогут добраться до *B*, если велосипед нельзя оставлять на дороге без присмотра?

Решение. Двое проезжают половину пути, потом один отправляется пешком, а второй остается стеречь оба велосипеда до прихода третьего. В результате первый и третий шли полпути пешком (это заняло 22,5/5=4,5 часа) и полпути ехали (это заняло 22,5/15=1,5 часа), перерывов у них не было. Значит, каждый из них потратили на путь шесть часов. Ясно, что второй приехал одновременно с третьим, т. е. все затратили по **6 часов.**

Легко убедиться, что из аналогичных вариантов, отличающихся только выбором пункта остановки, наилучший – когда она точно посередине. Усложнения, включающие встречное движение, лишены смысла из-за того, что ни двое не могут ехать сразу на одном велосипеде, ни один – сразу на двух.

Замечание. Полное решение включает не только указание способа, но и обоснование того, что он наилучший.

6. Лев взял два натуральных числа, прибавил их сумму к их произведению и в результате получил 1000. Какие числа мог взять Лев? Найдите все варианты.

Решение. Если обозначить числа Льва через a и b, то получим: a+b+ab=1000. Прибавим к обеим частям единицу: 1+a+b+ab=1001, или (1+a)(1+b)=7·11·13. Поскольку a и b натуральны, то 1+a>1 и 1+b>1. Отсюда следует, что выполняется один из шести вариантов:

а) 1+a=7, 1+b=11·13, откуда a=6, b=142;
б) 1+a=11, 1+b=7·13, откуда a=10, b=90;
в) 1+a=13, 1+b=7·11, откуда a=12, b=76;
и ещё три варианта, которые получаются при замене a и b.

Ответ: 6 и 142, 10 и 90, 12 и 76.

**Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»**

2013/2014 учебный год. Второй тур

Задачи для 8 класса

1. Мила и Женя придумали по числу и выписали на доску все натуральные делители своих чисел. Мила написала 10 чисел, Женя — 9, а число 6 оказалось написано дважды. Сколько всего различных чисел на доске?

Решение. Поскольку число 6 написано дважды, то оба исходных числа (обозначим их a и b) делятся на 6.

Если Верино число имеет 10 делителей, то его разложение - либо p^9, либо $p^1 \cdot q^4$ (где p и q — некие простые числа); первое невозможно, поскольку оно делится на 6. Валино число имеет 9 делителей, так что его разложение — либо s^8, либо $s^2 \cdot t^2$; опять же возможно только второе. При этом числа p и q равны 2 и 3 в каком-то порядке, числа s и t — тоже. Легко видеть, что НОД таких чисел равен либо $2 \cdot 3^2=18$, либо $3 \cdot 2^2=12$, и в любом случае имеет $2 \cdot 3=6$ делителей. Значит, среди выписанных чисел ровно 6 повторяющихся, и количество различных чисел равно 10+9-6=13.

2. В окружности проведены три равных хорды, проходящие через одну точку. Докажите, что эти хорды являются диаметрами.

Решение. См. задачу 7.3.

3. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталась 1/5 всего золота и 1/7 всего серебра, а младшему — 1/7 всего золота. Какая доля серебра досталась младшему брату?

Решение.

1) Пусть масса золота в кладе равна z кг, а масса серебра — s кг. Старшему брату досталось z/5+s/7 кг; это меньше (z+s)/5, но больше (z+s)/7. Из этого следует, что братьев больше пяти, но меньше семи, то есть их шестеро.

2) Теперь получаем систему уравнений: z/5+s/7=100, z+s=600.
Решаем: z/5+s/7=z/6+s/6; (1/5-1/6)z=(1/6-1/7)s; z/30=s/42; z=(5/7)s.
Поскольку z+s=600, то z=250, s=350.

3) Младший брат получил 250/7 кг золота; значит, ему досталось 100-250/7=450/7 кг серебра. Доля этого серебра от всего серебра в кладе составляет 450/7:350=9/49.

Ответ: 9/49.

4. Три человека хотят приехать из города A в город B, расположенный в 45 километрах от A. У них есть два велосипеда. Скорость велосипедиста 15 км/ч, пешехода — 5 км/ч. За какое минимальное время они смогут добраться до B, если велосипед можно оставлять на дороге без присмотра?

Решение. Двое едут на велосипеде 15 километров, потом один из них оставляет велосипед у дороги и идет следующие 15 километров пешком, другой проезжает и следующие 15 километров и тоже оставляет велосипед (который потом должен подобрать первый), третий же идет пешком первые 15 километров, а остаток едет на подобранном велосипеде первого.

Покажем, что быстрее добраться нельзя. В любом случае они суммарно проедут 90 км, а пройдут 45. Значит, найдется хотя бы один из них, который пройдет не меньше 15 километров, а остальное проедет. Если он прошёл 15 км и проехал 30 км, то ему требуется ровно 5 часов; в противном случае — ещё больше времени.

Ответ. 5 часов.

Замечание. Полное решение включает не только указание способа, но и обоснование того, что он наилучший.

5. Карлсон купил в буфете несколько блинов (по 25 рублей за штуку) и несколько банок мёда (по 340 рублей за штуку). Когда он сообщил Малышу, какую сумму потратил в буфете, тот сумел только на основании этой информации определить, сколько банок мёда и сколько блинов он купил. Могла ли эта сумма превысить 2000 рублей?

Решение. См. задачу 5.5.

6. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник с периметром 2014, стороны которого проходят по линиям сетки. Какую наибольшую площадь он может иметь?

Решение. Рассмотрим сначала крайние вертикали и горизонтали. Уход с них внутрь прямоугольника не позволяет сократить периметр, но уменьшает площадь. Значит, наибольшую площадь имеет прямоугольник. Если A и B – длины его сторон, то A+B=1007.

Теперь среди различных прямоугольников с периметром 2014 ищем прямоугольник с наибольшим значением площади AB. Так как $4AB= (A+B)^2 — (A—B)^2 = 1007^2 — (A—B)^2$, то для достижения наибольшего значения площади AB нужно выбрать A и B так, чтобы их разность была как можно меньше. Так как сумма A и B нечётна, то их нельзя взять равными. Поэтому наименьшее возможное значение $A—B=1$. С учётом $A+B=1007$ находим $A=504$, $B=503$ и AB=**253512**.

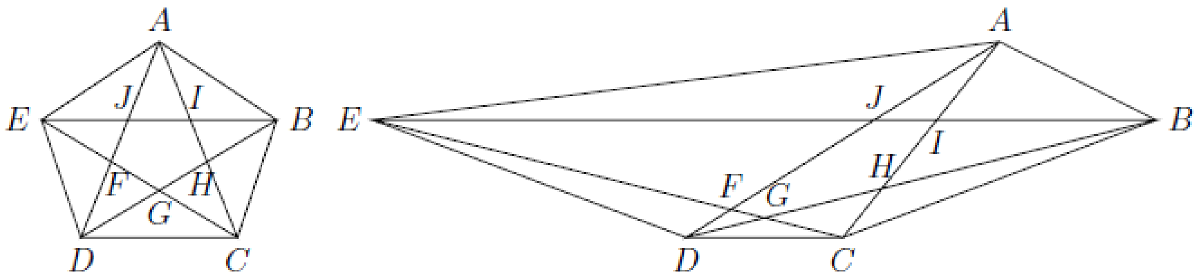
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Задачи для 9 класса

1. В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Для каждой пары диагоналей, пересекающихся внутри пятиугольника, нашли меньший из углов между ними. Какие значения может принимать сумма этих пяти углов?

Решение. Начать нужно с того, что точки пересечения диагоналей служат вершинами другого выпуклого пятиугольника, сумма углов которого равна 540°. Если все его углы тупые, то искомая сумма образована смежными с ними углами и равна 360°. Но если среди углов есть острые, то сумма станет меньше (так как смежный тупой угол заменяется внутренним острым). Легко построить примеры, показывающие, что её можно непрерывно уменьшать до нуля. Так, из рисунка видно, что если сдвигать вершину E влево, а A и B – вправо, то углы F и I можно сделать острыми и сколь угодно малыми; тогда сумма трёх остальных внешних углов будет стремиться к нулю.



Ответ: от 0 до 360°.

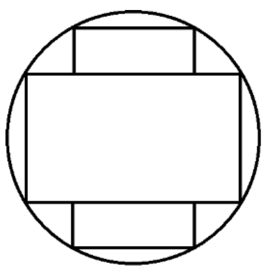
2. Мила и Женя придумали по числу и выписали на доску все натуральные делители своих чисел. Мила написала 10 чисел, Женя — 9, а число 6 оказалось написано дважды. Сколько всего различных чисел на доске?

Решение. См. задачу 8.1.

3. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталась 1/5 всего золота и 1/7 всего серебра, а младшему — 1/7 всего золота. А какая доля общего серебра досталась младшему?

Решение. См. задачу 8.3.

4. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать три части, из которых можно составить прямоугольник $1\times 2{,}4$. Части можно поворачивать и переворачивать.



Решение. Для начала расположим в круге прямоугольник с вершинами $(\pm\sqrt{3}/2, \pm 1/2)$. Его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$. Далее нарисуем два маленьких прямоугольника: один с вершинами $(\pm 1/2, 1/2)$ и $(\pm 1/2, \sqrt{3}/2)$, и второй, симметричный первому. Стороны каждого из этих прямоугольников равны 1 и $\sqrt{3}/2-1/2$. Из этих трёх прямоугольников легко сложить один со сторонами 1 и $\sqrt{3}+2\cdot(\sqrt{3}/2-1/2)=2\sqrt{3} - 1 >2{,}4$.

Замечание. Верное решение должно включать не только картинку, но и расчёты, которые показывают, что длина получившегося прямоугольника не меньше 2,4.

5. Пусть a и n — натуральные числа, причём известно, что a^n — 2014-значное число. Найдите наименьшее натуральное k такое, что a не может быть k-значным числом.

Решение. Пусть a – k-значное число, тогда $10^{k-1} \le a < 10^k$, поэтому $10^{(k-1)n} \le a^n < 10^{kn}$, то есть количество цифр в числе a^n лежит в промежутке $[(k-1)n+1, kn+1)$.

Заметим, что при фиксированных $n \le 1000$ и $k \ge 3$ количество цифр принимает все значения из этого промежутка (не может случиться, что при увеличении a на 1 число цифр в a^n увеличится более чем на одну); это можно установить, например, средствами мат. анализа (при умножении a на 0,001 a^n увеличится не более чем в e раз, т.е. менее чем в 10 раз). При $k \le 3$ это очевидно. Поэтому если в таком промежутке лежит число 2014, то найдётся k-значное a, для которого a^n – 2014-значное.

Итак, подходящее a существует тогда и только тогда, когда $(k-1)n+1 \le 2014 \le kn+1$, то есть когда n лежит в промежутке $[2013/k;\ 2013/(k-1))$.

Значит, надо найти наименьшее k, для которого в этом промежутке нет ни одного целого числа. Заметим, что длина этого промежутка равна $2013/k(k-1)$, и она должна быть меньше 1. Значит, $k(k-1)>2013$, т.е. $k>45$.

Проверим для k начиная с 46, выполняется ли условие об отсутствии целого числа в указанном промежутке. Мы обнаружим, что
(для k=46) $2013/46 < 44 < 2013/45$ (т.к. $44 \cdot 45 < 2013$, $44 \cdot 46 = 45^2 - 1^2 = 2025 - 1 > 2013$);
(для k=47) $2013/47 < 43 < 2013/46$ (т.к. $43 \cdot 46 < 2013$, $43 \cdot 47 = 45^2 - 2^2 = 2025 - 4 > 2013$);
(для k=48) $2013/48 < 42 < 2013/47$ (т.к. $42 \cdot 47 < 2013$, $42 \cdot 48 = 45^2 - 1^2 = 2025 - 9 > 2013$);
но (для k=49) $2013/49 > 41$ (т.к. $41 \cdot 49 = 45^2 - 1^2 = 2025 - 16 < 2013$).

Таким образом, промежуток $[2013/49, 2013/48)$ не содержит целых чисел, и при k=49 подходящих n не существует.

Ответ: k=49.

6. Павел придумал новый способ сложения чисел: он называет «павлосуммой» чисел x и y значение выражения $x\#y=(x+y)/(1-xy)$, если оно определено. Однажды он «сложил» своим способом числа a и b и «прибавил» к ним c, а друга попросил «сложить» числа b и c и «прибавить» к ним a. Могли ли у них получиться разные результаты?

Решение. Нужно проверить, что $a\#(b\#c)=(a\#b)\#c$. Это можно доказать прямым вычислением, а можно заметить, что если x и y — тангенсы углов A и B, то $x\#y$ — тангенс угла A+B, и поэтому требуемое свойство следует из того, что tg(A+(B+C))=tg((A+B)+C).

Замечание. При этом возможно, что одно из значений определено, а второе не определено, например, при a=2, b=c=1.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Задачи для 10 класса

1. В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Для каждой пары диагоналей, пересекающихся внутри пятиугольника, нашли меньший из углов между ними. Какие значения может принимать сумма этих пяти углов?

Решение. См. задачу 9.1.

2. Пусть $f(x) = x^3+9x^2+27x+24$. Решите уравнение $f(f(f(f(x)))) = 0$.

Решение. Заметим, что $f(x) = (x+3)^3-3$.

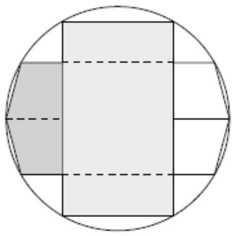
Поэтому $f(f(x)) = f((x+3)^3-3) = ([(x+3)^3-3]+3)^3-3=(x+3)^9-3$;
аналогично получаем, что $f(f(f(x))) = (x+3)^{27}-3$ и $f(f(f(f(x)))) = (x+3)^{81}-3$.

Итак, нужно решить уравнение $(x+3)^{81}-3 = 0$; его корень равен $-3 + \sqrt[81]{3}$.

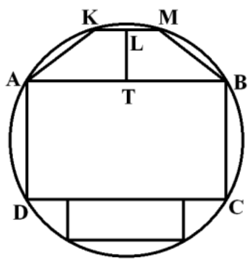
3. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать четыре части, из которых можно составить прямоугольник 1×2,5. Части можно поворачивать и переворачивать.

Решение.

Способ 1. Можно вырезать из круга прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}$, а также три трапеции (см. рисунок). Из этих деталей получается прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}+1/2+(\sqrt{3}/2-1/2)=(3\sqrt{3})/2>2{,}5$.

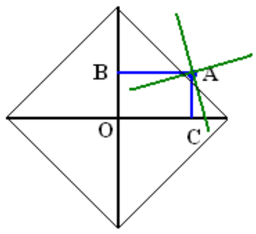


Способ 2. Для начала расположим в круге прямоугольник с вершинами $(\pm\sqrt{3}/2, \pm 1/2)$. Его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$. Далее нарисуем прямоугольник с вершинами $(\pm 1/2, -1/2)$ и $(\pm 1/2, -\sqrt{3}/2)$, его стороны равны 1 и $\sqrt{3}/2-1/2$. Наконец, нарисуем две прямоугольных трапеции ATLK и BTLM так, чтобы сумма оснований каждой трапеции равнялась 1. Поскольку нижние основания равны $\sqrt{3}/2$, то верхние должны быть $1-\sqrt{3}/2>0{,}15$. Ордината вершины M равна $\sqrt{(1-LM^2)}<\sqrt{(1-0{,}15)^2}=\sqrt{0{,}9775}>0{,}985$. Поэтому высота каждой трапеции больше 0,485. Из двух таких трапеций можно составить прямоугольник со сторонами 1 и >0,485. Из полученных частей легко составить прямоугольник с шириной 1 и длиной $>\sqrt{3}+(\sqrt{3}/2-1/2)+0{,}485>2{,}5$.



4. Внутри квадрата со стороной 100 нарисовали 100 000 квадратов. Диагонали разных квадратов не имеют общих точек. Докажите, что сторона хотя бы одного квадрата меньше 1.

Решение. Пусть сторона каждого квадрата не меньше 1. Для начала докажем, что расстояние между центрами квадратов не меньше 0,49. Действительно, пусть O и A – центры квадратов и OA<0,49, тогда AC<0,49 (см. рисунок). Хотя бы одна из прямых, содержащих



диагонали квадрата с центром A, пересекает прямую OC в точке, удалённой от A не более чем на $0{,}49\sqrt{2}$. Но тогда сторона этого квадрата не превышает 0,98.

Теперь используем принцип Дирихле. Разобьём исходный квадрат на 90000 квадратиков со стороной 1/3. В одном из этих квадратиков окажется хотя бы два центра, но расстояние между ними не может превышать $\sqrt{2}/3<0{,}49$.

5. Пусть a и n — натуральные числа, причём известно, что a^n — 2014-значное число. Найдите наименьшее натуральное k такое, что a не может быть k-значным числом.

Решение. См. задачу 9.5.

6. Павел придумал новый способ сложения чисел: он называет «павлосуммой» чисел x и y значение выражения $x\#y=(x+y)/(1–xy)$, если оно определено. Однажды он «сложил» своим способом числа a и b, «прибавил» к ним c, а к результату — d. В то же время его друг «сложил» числа c и d, «прибавил» к ним b, а к результату — a. Могли ли у них получиться разные результаты?

Решение. Нужно проверить, что $((a\#b)\#c)\#d=a\#(b\#(c\#d))$. Это можно доказать прямым вычислением, а можно заметить, что если x и y — тангенсы углов A и B, то $x\#y$ — тангенс угла A+B, и поэтому требуемое свойство следует из того, что tg(((A+B)+C)+D)= tg(A+(B+(C+D))).

Замечание. При этом возможно, что одно из значений определено, а второе не определено, например, при a=b=2, c=d=1.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Задачи для 11 класса

1. В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Для каждой пары диагоналей, пересекающихся внутри пятиугольника, нашли меньший из углов между ними. Какие значения может принимать сумма этих пяти углов?

Решение. См. задачу 9.1.

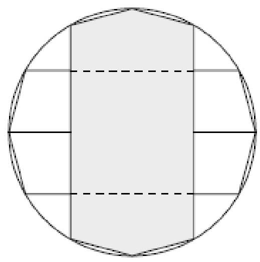
2. Пусть $f(x) = x^3+9x^2+27x+24$. Решите уравнение $f(f(f(f(x)))) = 0$.

Решение. См. задачу 10.2.

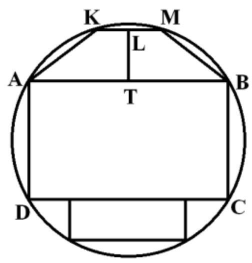
3. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать пять частей, из которых можно составить прямоугольник 1×2,7. Части можно поворачивать и переворачивать.

Решение.

Способ 1. Можно вырезать из круга шестиугольник и три трапеции и расположить их как показано на рисунке.
Получается прямоугольник со сторонами 1 и $2+2\cdot(\sqrt{3}/2-1/2) = 1+\sqrt{3} > 2{,}7$.



Способ 2. Для начала расположим в круге прямоугольник с вершинами $(\pm\sqrt{3}/2, \pm 1/2)$. Его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$. Далее нарисуем две прямоугольных трапеции ATLK и BTLM так, чтобы сумма оснований каждой трапеции равнялась 1, а также ещё две симметричные трапеции. Поскольку большие основания равны $\sqrt{3}/2$, то меньшие должны быть $1-\sqrt{3}/2>0{,}15$. Ордината вершины M равна $\sqrt{(1-LM^2)} < \sqrt{(1-0{,}15)^2} = \sqrt{0{,}9775} > 0{,}985$. Поэтому высота каждой трапеции больше 0,485. Из двух таких трапеций можно составить прямоугольник со сторонами 1 и >0,485.
Из полученных частей легко составить прямоугольник с шириной 1 и длиной $>\sqrt{3}+2\cdot 0{,}485>2{,}7$.



4. Существует ли треугольная пирамида, у которой высота равна 60, высота каждой боковой грани, проведённая к стороне основания, равна 61, а периметр основания равен 62?

Решение. Поскольку высоты боковых граней одинаковы, то расстояния от проекции вершины до сторон также одинаковы и равны 11, т.е. радиус вписанной в основание окружности равен 11.

По известной формуле, площадь треугольника равна $62\cdot 11/2=341$. В то же время площадь вписанного круга $\pi r^2=121\pi>341$, что **невозможно**.

5. Пусть a и n — натуральные числа, причём известно, что a^n — 2014-значное число. Найдите наименьшее натуральное k такое, что a не может быть k-значным числом.

Решение. См. задачу 9.5.

6. Павел придумал новый способ сложения чисел: он называет «павлосуммой» чисел a и b значение выражения $a\#b=(a+b)/(1-ab)$, если оно определено. Как и в обычной арифметике, умножение на натуральное число Павел понимает как сложение соответствующего числа одинаковых слагаемых: $a@b=((a\#a)\#a)...\#a$ (здесь b «слагаемых»). Существуют ли в арифметике Павла такие неравные натуральные числа x и y, для которых равны «произведения» $x@y$ и $y@x$?

Решение. В алгебре Павла:
$x\ @\ y=x\ \#\ x\ \#\ ...\ \#\ x$ (y раз),
$y\ @\ x=y\ \#\ y\ \#\ ...\ \#\ y$ (x раз).

Так как (A+B)/(1-AB)=tg(arctg(A)+arctg(B)), то A # B=tg(arctg(A)+arctg(B)).

Следовательно,
$x\ @\ y=\operatorname{tg}(y\cdot\operatorname{arctg}(x))$,
$y\ @\ x=\operatorname{tg}(x\cdot\operatorname{arctg}(y))$.

Если $x\ @\ y=y\ @\ x$, то $x\cdot\operatorname{arctg}(y)=y\cdot\operatorname{arctg}(x)$, т.е. $\operatorname{arctg}(x)/x=\operatorname{arctg}(y)/y$.

Рассмотрим функцию $F(z)=\operatorname{arctg}(z)/z$ (при $z>0$), её производная
$F'(z)=(z/(1+z^2)-\operatorname{arctg}(z))/z^2$.

Так как $\operatorname{arctg}(z)>z/(1+z^2)$, то $F'(z)<0$.

Следовательно, F(z) монотонно убывает, то есть принимает различные значения при различных аргументах. Поэтому равенство $F(x)=F(y)$ невозможно, то есть невозможно равенство $\operatorname{arctg}(x)/x=\operatorname{arctg}(y)/y$.

Итак, $x\ @\ y$ не может оказаться равным $y\ @\ x$. Значит, ответ на поставленный в задаче вопрос - **отрицательный.**