نام و نام خانوادگی: مریم شهریاری **پایه:** هشتم

پاسخ مسأله (۱) /

۱۰ رقم اول را در نظر می‌گیریم این که این ۱۰ رقم باید متفاوت باشند پس باید از تمام ارقام ۰ تا 9 استفاده شده باشد. از طرفی مجموع ارقام ۰ تا 9 برابر ۴۵ است ($\frac{9\times 10}{2}$) و پس از قرار دادن ۱۰ رقم اول بقیه ۱۰ تایی‌های بعدی باید به همان ترتیب باشند تا در هر ۱۰ رقم متوالی این عدد تمام رقم‌ها متفاوت باشند.

مجموع ارقام کل عدد ← $2017 \div 45 = 44$ → مجموع ارقام هر دوره‌ی ۱۰ تایی.

$$\begin{array}{r} 2017 \\ -180 \\ \hline 217 \\ -180 \\ \hline 37 \end{array}$$

(عدد مورد نظر فقط در ۱ دوره حضور داشته باشد)

یعنی پس از تمام ۴۴ دوره‌ی ۱۰ تایی (رقم‌های بعدی رقم تشکیل دهنده) باید مجموع ارقام ۳۷ باشد و یا به عبارتی دیگر ۸ واحد کمتر باشد.

$45 - 37 = 8$

$44 \times 10 = 440$

$10 - 1 = 9$

$10 - 2 = 8$

① ۴۴۹ رقمی می‌تواند باشد

۴۴۸ رقمی می‌تواند باشد

پس از ۴۴۰ دوره‌ی ۱۰ تایی نیاید.

$8 = 8 + 0$

$8 = 1 + 7$

$8 = 2 + 6$

$8 = 3 + 5$

$8 = 4 + 4$ ← غلط است زیرا در هر ۱۰ رقم متوالی فقط یک ۴ داریم،

$8 = 1 + 2 + 5$

$8 = 1 + 3 + 4$

$8 = \ \vdots$

$10 - 3 = 7$

$440 + 7 = 447$

۴۴۷ رقمی می‌تواند باشد

$8 = 1 + 2 + 5 + 0$ ، ⋮

$10 - 4 = 6$

$440 + 6 = 446$

رقمی هم داریم

ادامه‌اش بعد

پس از این اگر بخواهیم ترکیبی چهارتایی بسازیم که مجموعش ۸ باشد و از ۵ استفاده نکنیم نمی‌توانیم زیرا ۱۰=۴+۳+۲+۱ که از ۸ بیشتر است و این حداقل مجموع است.

☆ گفتیم از ۵ استفاده نکنیم چون ترکیب‌های ۴تایی که ۵ دارند همان ترکیب‌های ۳تایی هستند در اصل. و برای ساختن یک ترکیب ۵تایی بدون استفاده از ۵ که نمی‌توانیم به طور بدیهی زیرا ۱۵=۵+۴+۳+۲+۱ پس تنها می‌توانستیم به ترکیبی ۴تایی ۵ بدهیم که حال نیز اثبات کردم هیچ ترکیب ۴تایی بدون ۵ وجود ندارد جز ترکیب‌هایی که از ترکیب ۳تایی ساخته شده‌اند (یک بار ۵ گرفته‌اند) و دوباره نمی‌توانند ۵ بگیرند چون اگر بگیرند در ۱ رقم همگانی رقم تکراری وجود خواهد داشت.

بنابراین تنها این عددها می‌توانند ۴۴۹ _ ۴۴۸ _ ۴۴۷ _ ۴۴۶ جمع باشد.

نام و نام خانوادگی: مریم شهریاری　　**پایه:** هشتم

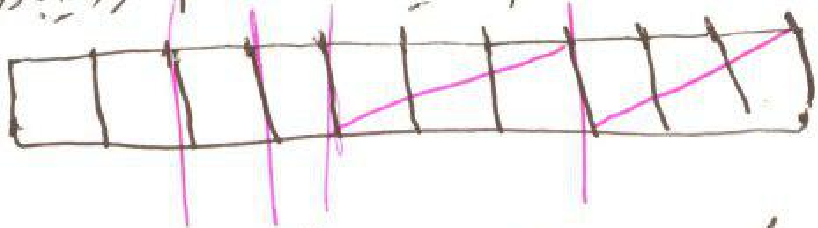
پاسخ مسأله (۲) /

مساحت مربع ساخته شده با مساحت مستطیل برابر است

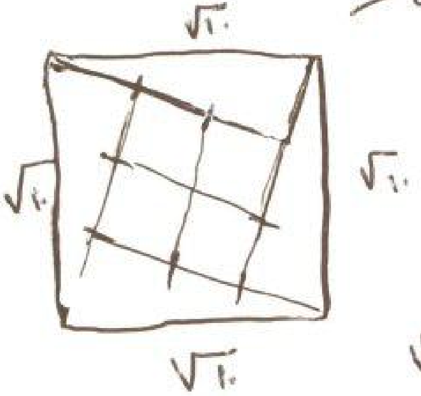
$1\times10=10$ → در نتیجه ضلع مربع باید $\sqrt{10}$ باشد

$(\sqrt{10})^2 = 3^2 + 1^2$

پس نتیجه گرفتیم که باید شکل های خاصی از آن را با دو ضلع که ۳ و ۱ جدا کنیم



و با کنار هم قرار دادن آن ها مانند شکل زیر



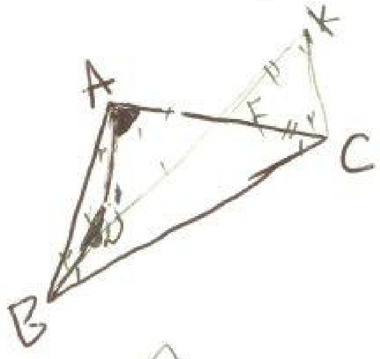
و با برش از خط های صورتی

این ۷ قطعه به دست می آید

که با آن ها می توانیم مربعی به ضلع $\sqrt{10}$

بسازیم.

پاسخ مسأله (۳) /



فرض | $\overline{BD} + \overline{AC} < \overline{BC}$
مثلث ABC

حکم $\Rightarrow \hat{DAC} + \hat{ADB} < 180$

اثبات: برهان خلف یعنی می‌گوییم $\hat{ADB} + \hat{DAC} \not< 180$

استراحات مساوی را از نقطه D رسم می‌کنیم امتداد BD را ادامه می‌دهیم زاویه D_1 با A_1 برابر است زیرا

$D_1 + D_2 = 180$ (انتقالی)
$A_1 + D_2 = 180$ (اجاحفاظت) $\Rightarrow A_1 = D \Rightarrow$

نقطه برخورد امتداد BD با ضلع AC را F می‌نامیم

سپس خط BD را از جای ادامه می‌دهیم N تا $FK = FC$ شود

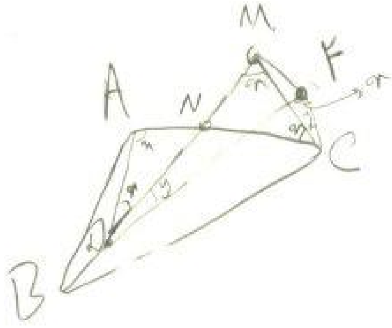
$\Rightarrow AF = FD$

حال BK همان $\overline{BD} + \overline{AK}$ می‌باشد حالا ضلع BC روبه‌روی زاویه K قرار دارد و ضلع BK روبه‌روی زاویه C به دلیل متساوی‌الساقین بودن FC و FK

$K_1 = C_2$ داریم و از طرفی $C = C_1 + C_2$ بنابراین $C > K_1$ و طبق قضیه زاویه بزرگ‌تر و عکس آن که می‌گوید ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر بزرگ‌تر است نتیجه می‌گیریم

$BK > BC$ که $\Leftarrow$ $\overline{BD} + \overline{AC} > \overline{BC}$ بنابراین با فرض تناقض دارد پس

$\hat{DAC} + \hat{ADB} \neq 180$



حالا اثبات می‌کنیم که $\hat{DAC}+\hat{BDA}$ نمی‌تواند از ۱۸۰ کمتر باشد.

برهان خلف: $180 > \hat{DAC}+\hat{BDA}$

خط BD را تا جایی امتداد می‌دهیم که DF مساوی باشد با AC سپس DM را به گونه‌ای می‌کشیم که $\hat{DAC} = \hat{MDA}$ و آن را تا جایی امتداد می‌دهیم که $MD = DF$ باشد. اگر زاویه‌ی $\hat{DAC}$ را مساوی x درجه در نظر بگیریم زاویه‌ها را در شکل جایگذاری می‌کنیم

$$\hat{MDA} = \hat{DAC} \Longrightarrow ND = AN$$

$DM = DF = AC$ (خودمان رسم کردیم)

$$\left.\begin{array}{l} ND = AN \\ DM = AC \end{array}\right\} \Longrightarrow NM = NC$$ به دلیل متقابل به رأس بودن

زاویه‌ی N و مساوی بودن ۲ زاویه رأس در دو شکل مساوی است پس زاویه‌های دیگر هم برابر با x هستند در دو شکل. آنگاه حکم را که دوباره باشد از مخالف زاویه ببرند و عکس آن در شکل می‌فهمیم که

$$BD + DF > BC \Longleftarrow BF > BC$$

$$BD + DM > BC$$ که با فرض در تناقض است

پس حکم صحیح است.

نام و نام خانوادگی: مریم شیریان　　**پایه:** هشتم

پاسخ مسأله (۴) /

به هر ملوان تعداد یکسانی سکه برسد.

درحالتی که ۲ ملوان باشند به هر یک ۳۰ سکه می‌رسد،

درحالتی که ۳ ملوان باشند به هر یک ۲۰ سکه می‌رسد.

درحالتی که ۴ ملوان باشند به هر یک ۱۵ سکه می‌رسد.

درحالتی که ۵ ملوان باشند به هر یک ۱۲ سکه می‌رسد.

درحالت حداقل کیسه آن چه که حتمی است این است که می‌توانیم بگوییم ۲ کیسه ۱۲ تایی حتما خواهیم داشت

(کمترین تعداد از آن کیسه و کمترین تعداد سکه در آن)

وقتی ۲ ملوان باشند اگر به هر ۳۰ سکه برسد قسمتی است که با هم تقسیم و کنار کیسه‌ها دیگر هم

(۱۲)　(۱۲)

برای ۱۲ تای بعدی از ۴ کیسه ۳ تایی استفاده می‌کنیم تا اگر ۴ ملوان بودند

(۳)(۳)(۳)(۳)

به هر مجموعه ۱۲ تایی یک کیسه ۳ تایی اضافه کردن و ۴ مجموعه ۱۵ تایی درست کردن

و یک مجموعه ۱۲ تایی را از بین ببریم تا همین حالا برای حالت ۲ ملوان هم درست شده باشد ($3+3+3+3$)

به دلیل تعداد حداقل کیسه‌ها مجموعه ۱۲ تایی بعدی را می‌توانیم به صورت جمع هر ۲ عدد یا ۳ یا هر تعداد عدد بنویسیم اما آن را یک ۱۲ تایی کامل در نظر می‌گیریم (در یک کیسه) تا حداقل تکرار به دست آید. حالا یک مجموعه ۱۲ تایی دیگر نیز باید

(۱۲)

تولید کنیم از آن جایی که هر مجموعه ۱۲ تایی برای تبدیل به یک مجموعه ۲۰ تایی باید با ۸ جمع شود. (که قبل از آن باید ۳ جمع شده) پس کیسه‌ی بعدی را باید با ۵ بسازیم تا جایی که می‌توانیم پس $12=5+5+2$

ادامه صفحه بعد

۱۲ ۱۲ ۱۲

۱۲ ← ۳ ۳ ۳ ۳

۵
۵
۲
↓
۱۲

برای حالت ۵ ملوان جواب می دهد

۱۲ + ۳ ۱۲ + ۳ ۱۲ + ۳ ۵ + ۵ + ۲ + ۳

برای حالت ۴ ملوان جواب می دهد.

۱۲ + ۵ + ۳ ۱۲ + ۵ + ۳ ۱۲ + ۲ + ۳ + ۳

برای حالت ۳ ملوان جواب می دهد.

۱۲ + ۱۲ + ۳ + ۳ ۱۲ + ۳ + ۳ + ۲ + ۵ + ۵

برای حالت ۲ ملوان جواب می دهد.

* حالا باید ثابت کنم این مقدار کیسه (۱۰ کیسه) کمترین مقدار است.

با یک مثال به ایده کلی برای اثبات این موضوع می رسیم. فرض کنید بجای یکی از کیسه های ۱۲ تایی ۲ کیسه (مثلا ۸ تایی + ۴ تایی) می گذاشتم در این حالت ترکیب های بودند که در آن ها ۴ و ۸ در همه حالات ۵ ملوان - ۴ ملوان - ۳ ملوان - ۲ ملوان در کنار هم می بودند پس می توانستم از اول بجای ۲ کیسه آن ها را ۱ کیسه ۱۲ تایی در نظر بگیرم.

حالا در ترکیب های بالا که من نوشتم نمی توانید کیسه ای را پیدا کنید که در تمام حالت های ۵ ملوان - ۴ ملوان - ۳ ملوان - ۲ ملوان در کنار کیسه ی دیگری باشد پس جواب من درست است و پاسخ ۱۰ به عنوان حداقل تعداد کیسه ها درست است یعنی هیچ ۲ کیسه ای را بیش تر نداریم که در تمام ترکیب ها در کنار هم باشند.

پاسخ مسأله (۵) /

N تعداد چیدمان های ممکن ۳۲ دومینو و S تعداد چیدمان های ممکن ۱۶ دومینو.

بدون آن که خیلی درگیر مسئله و شمردن تعداد حالات بشیم مسئله را حل می کنیم

وقتی ۱۶ دومینو را در جدول ۸×۸ (۶۴ خانه ای) می چینیم ۲ حالت دارد

۱

به گونه ای ۱۶ دومینو چیده شده باشد که بتوانیم ۱۶ دومینوی دیگر را در بین آن ها (فضاهای خالی) قرار دهیم به گونه ای که جدول ۶۴ خانه ای ما کاملاً کاشی شود.

۲

نتوانیم ۱۶ کاشی دیگر را در فضاهای خالی ایجاد شده قرار دهیم (حتی اگر فضای ۱ خانه ای ایجاد شده باشد نمی توانیم)

تعداد حالت های ممکن در حالت ۱ برابر با همان N می باشد و S برابر است با N + تعداد حالت های ممکن در حالت ۲ بنابراین

$S > N$