نام و نام خانوادگی: محمد معمارزاده **پایه:** هشتم

پاسخ مسأله (۱) /

مشخص است که برای ساخت چنین عددی به دنباله‌ای شبیه سرهم از اعداد (۰ تا ۹) (نه به این چنین مزوما) نیاز داریم، چون اگر این اعداد به صورت دنباله‌ای نباشد، حداکثر در هشتمین سری اعداد ۰ رقم‌های متوالی (یعنی رقم ۷۰ تا ۸۰ از سمت چپ) دو عدد تکراری در یک دنباله ۱۰ عضوی از اعداد یافت می‌شوند.

مثال

این عدد می‌تواند درست باشد ✓ ۹۷۵۴۶۸۳۱۲۰۹۷۵۴۶۸۳۱۲۰ .....

دنباله با تکرار همین چنین

۸ دو بار تکرار شده

این عدد نمی‌تواند درست باشد X ۹۷۵۴۶۸۳۱۲۰ ۴۸۷ ۴۶۸۵۳۱۲۰ .....

این دو سری تکراری نیستند و ارقامی مثل ۸ دو بار یافت می‌شوند

★ لازم به ذکر است که دنباله با صفر شروع نمی‌شود (چون رقم اول از سمت چپ نمی‌تواند ۰ باشد)

حال مجموع هر ۱۰ رقم پشت سرهم از ۰ تا ۹ است پس:

$$\frac{۹\times۱۰}{۲}=۴۵$$

$\underbrace{\text{— — — — —}}_{۴۵}$ $\underbrace{\text{— — —}}_{۴۵}$ .....

پس مجموع ارقام عدد، $۴۵x+y$ است.

حال می‌نویسیم: $۲۰۱۷ \div ۴۵ = ۴۴$، باقیمانده ۲۷ پس عدد از ۴۴ تا دسته ۱۰ رقمی تکراری به اضافه چند عدد با مجموع ۲۷ به دست آمده.

پس باید تمامی حالات با مجموع ۲۷ را به دست آوریم:

حال باید کمترین میزان ارقام از ۰ تا ۹ که می‌توانند مجموع ۲۷ را بسازند پیدا کنیم = ۴ ($\underbrace{۹+۸+۷+۳}$ و ...) تا رقم

و باید بیشترین میزان ارقام از ۰ تا ۹ که می‌توانند مجموع ۲۷ را بسازند پیدا کنیم = **۷** (برای مثال: ۹+۷+۵+۳+۲+۰+۱)

۹+۶+۵+۷ ... (۱۰ حالت دیگر برای جابجایی ارقام)

۹+۸+۷+۳ ... ⟶ (۱۰ حالت دیگر)

۹+۸+۶+۴ ... ⟶ ۱۰ حالت دیگر برای تغییر ارقام

۱+۲+۳+۵+۷+۹ ... ۱۰ حالت دیگر

و

⋮

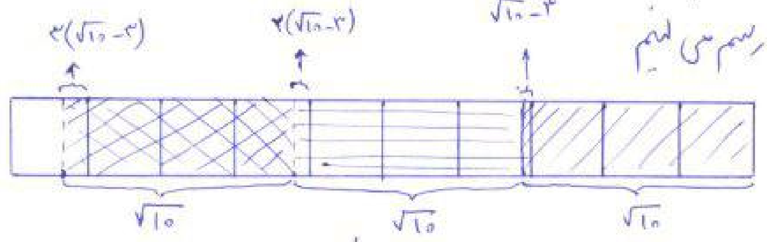
پس طبق متن بالا تعداد ارقام می‌تواند از $۴۴\times۱۰+۴$ (۴۴ خارج قسمت تقسیم ۲۰۱۷ بر ۴۵ است یعنی تعداد دسته‌ها با مجموع ۴۵ و ۱۰ تعداد ارقام هر دسته و ۴ کمترین تعداد ارقام که می‌توانند مجموع ۲۷ را بسازند) تا $۴۴\times۱۰+۷$ باشند یعنی عدد مورد نظر می‌تواند ۴۴۴ رقمی، ۴۴۵ رقمی، **۴۴۶** رقمی و ۴۴۷ رقمی باشد و نمی‌تواند جز این‌ها باشد (اثباتش در بالا و اول متن توضیح داده شده است)

نام و نام خانوادگی: محمد معمارزاده **پایه:** هشتم

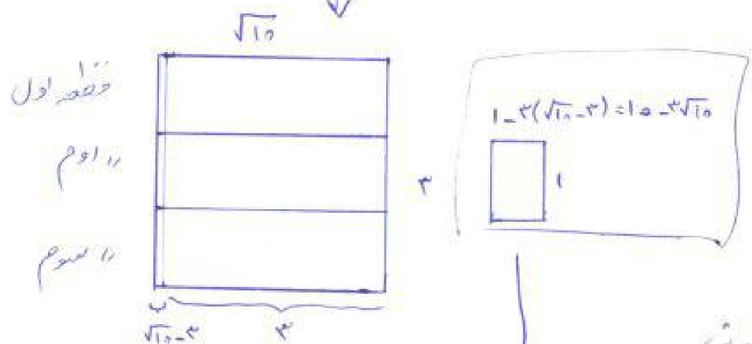
پاسخ مسأله (۲) /

ابتدا مستطیل ۱۰×۱ را رسم می‌کنیم

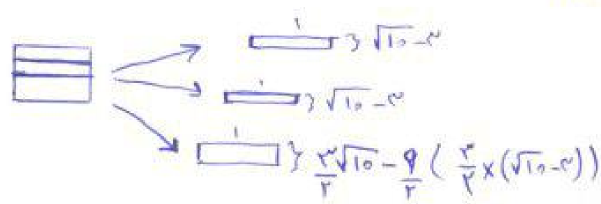
سپس ۳ قطعه به طول $\sqrt{10}$ و عرض ۱ جدا می‌کنیم و



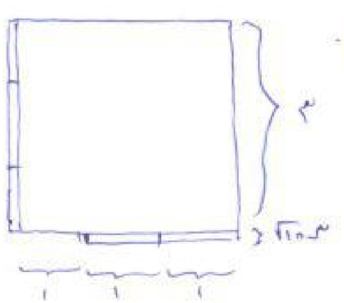
به صورت افقی روی هم می‌گذاریم تا مستطیلی به اضلاع ۳ و $\sqrt{10}$ به وجود آید. اضلاع مستطیل باقی‌مانده ۱ و $10-3\sqrt{10}$ است.



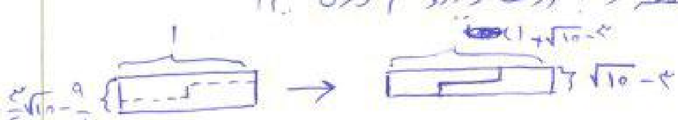
به عرض مستطیل باقی‌مانده ۲ برش زده و دو مستطیل با عرض $\sqrt{10}-3$ و طول ۱ جدا می‌کنیم (تا به حال مستطیل ۱۰×۱ را به ۶ قطعه تقسیم کرده‌ایم)



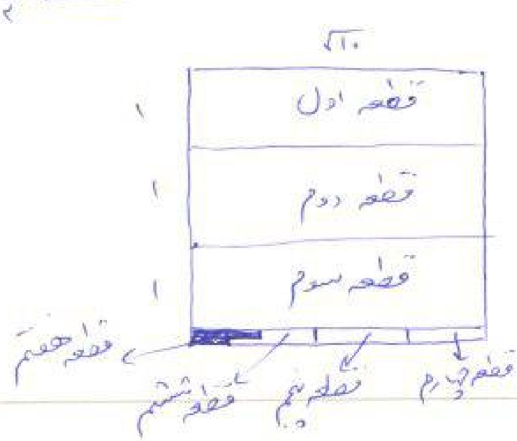
آن دو مستطیل حاصل را از عرض به عرض مستطیل بزرگ اضافه می‌کنیم.



حال به قسمت مهم ماجرا رسیدیم. مستطیل باقی‌مانده (با اضلاع ۱ و $\frac{3}{2}\sqrt{10}-\frac{9}{2}$) را به صورت زیر برش می‌زنیم تا به طول آن اضافه و از عرض آن کم شود (دو قطعه را به صورت زیری روی هم قرار می‌دهیم)

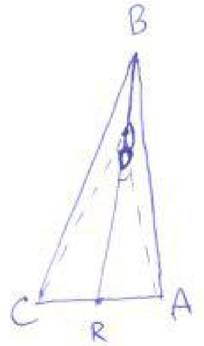


حال می‌توانیم قطعه حاصل را در جای خود قرار داده و مربعی با مساحت ۱۰ ایجاد کنیم.



نام و نام خانوادگی: عماد معارزاده **پایه:** هشتم

پاسخ مسأله (۳) /



ابتدا مثلثی دلخواه رسم می کنیم (با شرایط گفته شده در سوال)
و نقطه تقاطع خط BD با ضلع CA را R می نامیم

می دانیم که مجموع زاویه های $\hat{BDA}$ و $\hat{RDA}$ ۱۸۰° است (نیم صفحه هستند) و همینطور زوایای BDC و CDR.

روابط را می نویسیم:

$$\begin{cases} B\hat{D}A + R\hat{D}A = ۱۸۰^\circ \\ CDR + B\hat{D}C = ۱۸۰^\circ \\ \overline{BD} + \overline{DC} \overset{\text{قانون مثلث}}{>} \overline{CB} \Rightarrow \overline{CA} < \overline{DC} \Rightarrow ۲\frac{\overline{CA}}{۲} < \overline{DC} \Rightarrow \\ D\hat{R}C > C\hat{D}R \ (\text{زاویه روبه رو به ضلع بزرگتر، بزرگتر است}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ARD = KDR + DCR \Rightarrow \cancel{RD}\ AD > DR \text{ و } AD > CR \ (\text{بزرگترین ضلع روبه رو بزرگترین زاویه است}) \\ ARD + DRC = ۱۸۰^\circ \\ \overline{BD} + \overline{AD} \overset{\text{مثلث}}{>} \overline{AB} \end{cases}$$

(در مثلث ضلع ها برابر) $\Rightarrow DR > RA$ و $AD > DR \Rightarrow D\hat{A}R > R\hat{D}A$

$$\Rightarrow DAC\,(=DAR) > A\hat{D}R$$

$$BDA + ADR = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \boxed{BDA + DAC > ۱۸۰^\circ}$$

(لازم به ذکر است که این روابط برای تمامی مثلث ها این حکم صدق می کند)

نام و نام خانوادگی: محمد معارزاده **پایه:** هشتم

پاسخ مسأله (۴) /

ابتدا تعداد سکه مورد نیاز برای هر شخص نسبت به تعدادش را می نویسیم :

۶۰ {
۵×۱۲
۴×۱۵
۳×۲۰
۲×۳۰
۱×۶۰

سپس حالت های ممکن برای هر میزان که می تواند به یک نفر بدهد را می نویسیم :

۱۲ : ~~۱×۱۲~~ ، ~~۲×۶~~ ، ۳×۴ — و تمامی حالات جمع دو عدد یا چند عدد

۱۵ : ۳×۵ ، ۱×۱۵ — و تمامی حالات جمع دو عدد یا چند عدد

۲۰ : ۲×۱۰ ، ۴×۵ ، ۱×۲۰ — تمامی حالات جمع دو عدد یا چند عدد

۳۰ : ۶×۵ ، ۱۰×۳ ، ۱×۳۰ — و تمامی حالات جمع دو عدد یا چند عدد

کمک گرفتن از ۱۲ برای حل سوال کافی است به این صورت که :

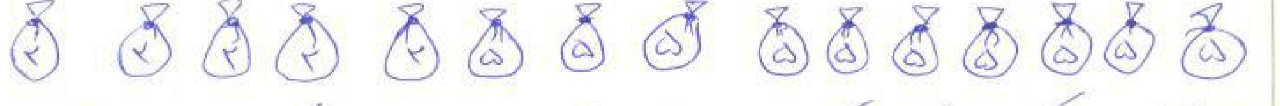
۱) می توان ۵ دسته ۱۲ تایی ساخت (حالت اول ، چون با ۱۲ می توان ۶۰ ، ۳۰ ، ۲۰ و ۱۵ ساخت)

۲) می توان ۱۰ دسته ۶ تایی ساخت (حالت دوم ، چون با ۶ می توان ۳۰ و ۱۵ ساخت)

۳) می توان ۱۵ دسته ۴ تایی ساخت (حالت سوم ، چون با ۴ می توان ۲۰ و ۱۵ را ساخت)

حال برای اطمینان خاطر حالت های ۱×۱۲ و ۲×۶ در بقیه اعداد را نیز بررسی می کنیم. نمی توان با ۱×۱۲ و ۲×۶ یعنی با ۵ یا ۱۰ دسته سکه ها را طوری تقسیم کرد که در هر حالت به همه تعداد سکه یکسان برسد.

حالات جمع ۲ عدد برای ۱۲ را بررسی می کنیم . باز هم امکان ندارد. پس حالات جمع ۳ عدد که مجموعشان ۱۲ بشود را بررسی می کنیم . می توان با اعداد ۲ و ۵ و ۵ این کار را انجام داد به این صورت که :



پس توانستیم با ۱۵ کیسه این کار را عملی کنیم . حال برای اعداد کمتر از ۱۵ بررسی می کنیم ببینیم صدق می کند یا نه : واضح است که با ۱ تا ۷ کیسه نمی توان این کار را انجام داد. طبق بررسی های بالا برای اعداد ۸ تا ۱۴ نیز نمی توانستیم این کار را انجام داد. پس حداقل کیسه لازم $\boxed{۱۵}$ عدد است

(اثبات مساله)

پاسخ مسأله (۵) /

بسیار واضح است که عدد S بسیار بزرگ‌تر از عدد N است (S ۲ برابر N نیست).

لازم نیست که تعداد هرکدام را بدست آوریم؛ بلکه با تفکری ساده می‌توان به تفاوت عظیم این دو عدد پی برد.

فرض می‌کنیم تعداد حالاتی که می‌توان جدول ۸x۸ را به خانه‌های ۱x۲ که با هم تداخل ندارند تقسیم کرد عدد R است (واضح است که N=R).

حال برای بدست آوردن تعداد حالات چینش در یکی از حالات "R" برای ۳۲ دومینو به صورت زیر عمل می‌کنیم:

چگونه می‌توان ۳۲ خانه از بین ۳۲ خانه انتخاب کرد؟ (انتخاب ۳۲ از ۳۲) = $\binom{۳۲}{۳۲} = \frac{\cancel{۳۲!}}{۰! \times \cancel{۳۲!}} = ۱$ حالت

یا چند پر کرد؟

$\underbrace{۱}_{\text{حالت}} \times \underbrace{R}_{\text{تعداد کل حالات}} = R$

برای ۱۶ دومینو به صورت زیر عمل می‌کنیم:

چگونه می‌توان ۱۶ خانه از ۳۲ خانه را پر کرد (انتخاب کرد؟) (انتخاب ۱۶ از ۳۲) = $\binom{۳۲}{۱۶}$ $\frac{۳۲!}{۱۶! \times ۱۶!}$

$\frac{۳۲!}{(۱۶!)^۲} \times \underbrace{R}_{\text{تعداد کل حالات}} = \frac{۳۲!\,R}{(۱۶!)^۲}$ حالت

$$\underbrace{\frac{۳۲!\,R}{(۱۶!)^۲}}_{S} > \underbrace{R}_{N} \Rightarrow \boxed{S > N}$$

(البته واضح است که ۳۲! از ۲(۱۶!) بزرگ‌تر است و ۳۲! $\frac{۳۲\times۳۱\times۳۰ \cdots\cdots \times ۱۷}{۱۶\times۱۵\times۱۴\times \cdots\cdots \times ۱}$ برابر ۲(۱۶!) است)

★ ("R" تعداد حالات متفاوت برای تقسیم کردن جدول ۸x۸ به ۳۲ جدول ۱x۲ است)