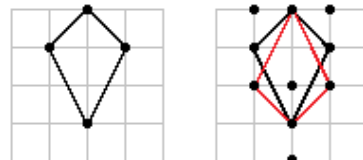


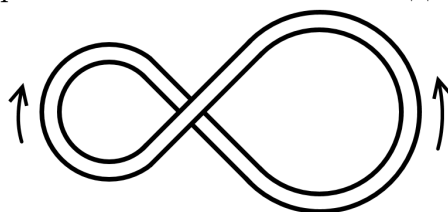
Задачи для 5 класса

1. Паша рисует точки на пересечении линий клетчатой бумаги.

Ему нравится, когда четыре точки образуют фигуру «воздушный змей», показанную справа (змей должен быть именно такой формы и размера, но может быть повернут). Например, 10 точек, показанные на втором рисунке, образуют всего два змея. Нарисуйте 10 точек так, чтобы они образовали целых пять змеев.



2. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать трассу полностью. Ещё через 10 минут Том вернулся в место старта. Через какое время после начала бега Том догонит Джерри?

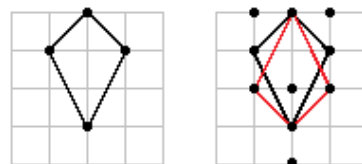


3. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют трёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 351 – 189 – 936 – 621 ... Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?
4. У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить монеты по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Хватит ли ему для этого девяти кошельков?
5. На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников из двух клеток), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а T — количество способов положить так 24 доминошки. Что больше — N или T ? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

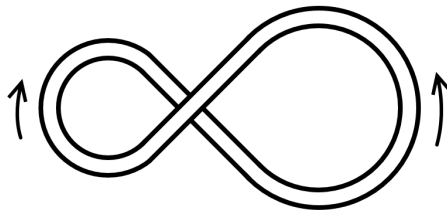
Задачи для 6 класса

1. Паша рисует точки на пересечении линий клетчатой бумаги.

Ему нравится, когда четыре точки образуют фигуру «воздушный змей», показанную справа (змей должен быть именно такой формы и размера, но может быть повернут). Например, 10 точек, показанные на втором рисунке, образуют всего два змея. Можно ли нарисовать некоторое количество точек так, чтобы количество змеев было больше, чем количество самих точек?



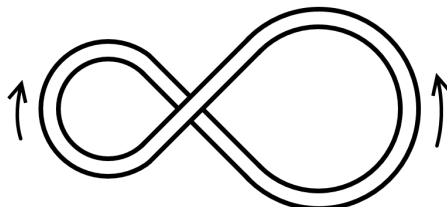
2. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегают в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать трассу полностью. Ещё через 15 минут Том вернулся в место старта. Через какое время после начала бега Том догонит Джерри?



3. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 3231 – 1539 – 9756 – 6561... Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?
4. У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить монеты по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Какое наименьшее количество кошельков ему понадобится? Не забудьте доказать, что найденное вами количество — наименьшее.
5. На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников из двух клеток), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а T — количество способов положить так 24 доминошки. Что больше — N или T ? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

Задачи для 7 класса

1. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать трассу полностью. Ещё через 15 минут Том вернулся в место старта. Через какое время после начала бега Том догонит Джерри?



2. Катя решила сосчитать сумму кубов всех натуральных делителей некоего натурального числа, и у неё получился результат $MATH$. Но потом она обнаружила, что забыла один из делителей. Прибавив его куб, она получила верный результат — $MASS$. Найдите наименьшее возможное значение числа $MATH$. ($MATH$ и $MASS$ — четырёхзначные числа, в которых каждая цифра заменена буквой, причём одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные — разными.)
3. Внутри треугольника ABC отмечена точка D такая, что $BD + AC < BC$. Докажите, что $\angle DAC + \angle ADB > 180^\circ$.
4. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют восьмизначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее. Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?
5. На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников из двух клеток), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а F — количество способов поставить на эту доску 16 фишек (в одну клетку нельзя ставить более одной фишки). Что больше — N или F ? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

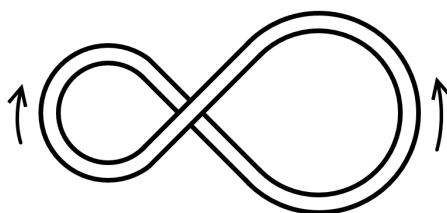
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2016/2017. Заключительный этап

Задачи для 8 класса

1. Сумма цифр натурального числа равна 2017. При этом, какие бы десять подряд идущих цифр числа мы не рассмотрели, все они различны. Сколько цифр может быть в числе? Укажите все варианты ответа и докажите, что других нет.
2. Докажите, что прямоугольник 1×10 можно разрезать на 7 частей и составить из них квадрат.
3. Внутри треугольника ABC отмечена точка D такая, что $BD + AC < BC$. Докажите, что $\angle DAC + \angle ADB > 180^\circ$.
4. У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить монеты по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Какое наименьшее количество кошельков ему понадобится? Не забудьте доказать, что найденное вами количество — наименьшее.
5. На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников из двух клеток), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а S — количество способов положить так 16 доминошек. Что больше — N или S ? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

Задачи для 9 класса

1. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать трассу полностью. В момент, когда Джерри пробежал ровно один круг с начала пути, Том наконец догнал его. Сколько времени Том гнался за Джерри?



2. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 3231 – 1539 – 9756 – 6561... Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков – начинающий или его соперник – может выиграть независимо от игры другого?
3. Докажите, что прямоугольник 1×10 можно разрезать на 5 частей и составить из них квадрат.
4. На плоскости отмечены $2n + 1$ точек, причём никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре – на одной окружности. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из этих точек, внутри которой лежит $n - 1$ точек и снаружи – тоже $n - 1$.
5. На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников из двух клеток), не накладывающихся друг на друга. Пусть N – количество способов положить так 32 доминошки, а S – количество способов положить так 16 доминошек. Что больше – N или S ? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2016/2017. Заключительный этап

Задачи для 10 класса

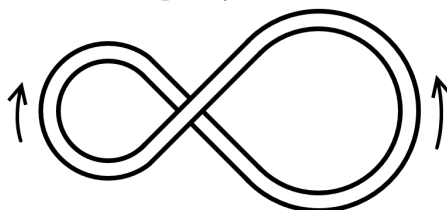
1. Сумма цифр натурального числа равна 2017. При этом, какие бы десять подряд идущих цифр числа мы не рассмотрели, все они различны. Найдите первые 10 цифр наименьшего и наибольшего из таких чисел. Обоснуйте ответ.
2. Найдите все такие пары действительных чисел x и y , для которых

$$25^{x^4-y^2} + 25^{y^4-x^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3. У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить монеты по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Какое наименьшее количество кошельков ему понадобится? Не забудьте доказать, что найденное вами количество — наименьшее.
4. Докажите, что при любом натуральном $n \leq 2017$ прямоугольник $1 \times n$ можно разрезать на 50 частей и составить из них квадрат.
5. Угол между диагоналями трапеции равен 60° . Докажите, что сумма длин боковых сторон не меньше, чем длина большего основания.

Задачи для 11 класса

1. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: $3231 - 1539 - 9756 - 6561 \dots$ Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?
2. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать трассу полностью. В момент, когда Джерри пробежал ровно один круг с начала пути, Том наконец догнал его. После этого они продолжили бежать в том же направлении. Окажется ли ещё когда-нибудь один из них над другим? Тома и Джерри считать точками, трассу — линией.



3. На плоскости отмечены $2n + 1$ точек, причём никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре — на одной окружности. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из этих точек, внутри которой лежит $n - 1$ точек и снаружи — тоже $n - 1$.
4. Угол между диагоналями трапеции равен 60° . Докажите, что сумма длин боковых сторон не меньше, чем длина большего основания.
5. В стране 100 городов, между ними действует несколько беспосадочных авиалиний так, что от любого города до любого можно добраться, возможно, с пересадками. Для каждой пары городов вычислили наименьшее количество перелётов, необходимых чтобы добраться от одного до другого. Назовём транспортной затруднённой страны сумму квадратов этих 4950 чисел. Какое наибольшее значение может принимать транспортная затруднённость? Ответ должен быть дан в виде числа (в десятичной системе счисления).