

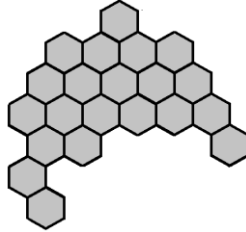
საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"

I ტური

V კლასი

ყველა პასუხი აუცილებლად დაასაბუთეთ

1. აჩვენეთ, როგორ გაჭრათ ეს ფიგურა 3 ტოლ ნაწილად (ნაწილები ტოლად ითვლებიან, თუ ისინი შეიძლება დაადო ერთმანეთს ისე, რომ დაემთხვეს).



2. ერთი ნატურალური რიცხვი 1-ით მეტია მეორეზე. შეიძლება თუ არა, რომ მათი ნამრავლი მთავრდებოდეს 2017?
3. მაგიდაზე დევს ტვირთები მასით 180, 181, 182 ..., 200 გრამი (თითო-თითო ჯერ). შეიძლება თუ არა შევარჩიოთ რამდენიმე ტვირთი ისე, რომ მათი ჯამური მასა იყოს ზუსტად 1 კგ?
4. დაფაზე დაწერილია 20 ცალი "0" და 17 ცალი "1". ერთ სვლაზე შეიძლება წავშალოთ ნებისმიერი ორი რიცხვი და მათ მაგივრად ჩავწეროთ მათი ჯამი. სვლა ითვლება მნიშვნელოვნად, თუ ჩაწერილი რიცხვი აღემატება თითოეულ წაშლილს. რამდენი მნიშვნელოვანი სვლა გაკეთდება, სანამ დაფაზე დარჩება მხოლოდ ერთი რიცხვი?
5. ყუთში დევს სხვადასხვა გემოსა და სხვადასხვა ქვეყნებში გამოშვებული რამდენიმე კანფეტი. ერთ ყუთში ყველა კანფეტი სხვადასხვაა ანუ განსხვავდებიან ან გემოთი, ან ქვეყნით, ან ორივეთი ერთად. თუ ყუთში ორი კანფეტი განსხვავდება გემოთიც და ქვეყნითაც, მაშინ მოიძებნება ზუსტად ერთი კანფეტი, რომელიც განსხვავდება ერთისაგან მხოლოდ გემოთი, ხოლო მეორესაგან მხოლოდ ქვეყნით. ცნობილია, რომ ყუთში 5 კანფეტია ვაშლის გემოთი და 7 კანფეტი, რომელიც რუსეთშია გამოშვებული. სულ რამდენი კანფეტია ყუთში? იპოვეთ პასუხის ყველა ვარიანტი.
6. გზის პირას დგას რიგრიგობით დანომრილი ბოძები: 0, 1, 2, 3 და ა.შ. 0-ბოძთან დგას მხედარი გაწვრთნილ ცხენზე. როდესაც მხედარი ამბობს რაიმე ნატურალურ რიცხვს, ცხენი აკეთებს ნახტომს წინ უახლოეს ბოძთან, რომლის ნომერი იყოფა ამ რიცხვზე. მხედარმა თქვა რიცხვები 1-დან 10-მდე ჩათვლით თითო ჯერ რაღაცა მიმდევრობით. ყველაზე შორს რომელ ბოძთან შეიძლება ის აღმოჩნდეს? დაასაბუთეთ, რომ ეს ნომერი ყველაზე დიდია.
(მაგალითი: მხედარმა თქვა რიცხვები მიმდევრობით 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 - ცხენმა გააკეთა ნახტომები მე-10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, 41 ბოძებთან).

7. ლიზის აქვს სურვილი დაფაზე 6×6 შეღებოს ორი სხვადასხვა ზომის კვადრატი, რომლებიც არ ფარავენ ერთმანეთს. კვადრატების გვერდები გადიან დაფის უჯრებზე. ამ შეღებვის რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს? დაფის შემობრუნებით მიღებული ვარიანტები ითვლება სხვადასხვად.

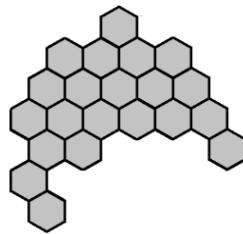
საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"

I ტური

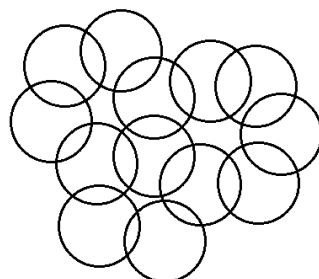
VI კლასი

ყველა პასუხი აუცილებლად დაასაბუთეთ

1. აჩვენეთ, როგორ გაჭრათ ეს ფიგურა 3 ტოლ ნაწილად (ნაწილები ტოლად ითვლებიან, თუ ისინი შეიძლება დაადო ერთმანეთს ისე, რომ დაემთხვეს).



2. ერთი ნატურალური რიცხვი 2-ით მეტია მეორეზე. შეიძლება თუ არა, რომ მათი ნამრავლი მთავრდებოდეს 2017?
3. ალექსიმ გადაწყვიტა შეემინა მარკების ორი კომპლექტი - თავისთვის და მეგობრისთვის. ერთი კომპლექტი შედგება A, B და C მარკებისაგან. ინტერნეტით მან იპოვა 3 მაღაზია, მაგრამ ყველგან მარკები იყიდებოდა წყვილ-წყვილად: პირველში A და B 200 ლარად, მეორეში B და C 300 ლარად და მესამეში C და A x ლარად. ალექსიმ დათვალა ფულის მინიმალური რაოდენობა, რომელიც სჭირდებოდა მარკების შესაძენად, ხოლო მერე გადაწყვიტა, რომ ეყიდა მარკები მხოლოდ ორ მაღაზიაში ამ სამიდან, რის გამოც მინიმალური თანხა გაიზარდა 120 ლარად. რის ტოლი შეიძლება იყოს x ?
4. სიბრტყეზე განლაგებულია წრეები ისე, როგორც ნაჩვენებია სურათზე.



თითოეულ წრეში შიგნით ჩასვით 3-3 წერტილი ისე, რომ წრის საზღვარზე ისინი არ მოხვდნენ. ყველაზე ცოტა რამდენი წერტილი გამოგივიათ ჯამში?

5. ყუთში დევს სხვადასხვა გემოსა და სხვადასხვა ქვეყნებში გამოშვებული რამდენიმე კანფეტი. ერთ ყუთში ყველა კანფეტი სხვადასხვაა, ანუ განსხვავდებიან ან გემოთი, ან ქვეყნით, ან ორივეთი ერთად. თუ ყუთში ორი კანფეტი განსხვავდება გემოთიც და ქვეყნითაც, მაშინ მოიძებნება ზუსტად ერთი კანფეტი, რომელიც განსხვავდება ერთისაგან მხოლოდ გემოთი, ხოლო მეორესაგან მხოლოდ ქვეყნით. ცნობილია, რომ ყუთში 5 კანფეტია ვაშლის გემოთი და 7 კანფეტი, რომელიც რუსეთშია გამოსვებული. სულ რამდენი კანფეტია ყუთში? იპოვეთ პასუხის ყველა ვარიანტი.

6. გზის პირას დგას რიგრიგობით დანომრილი ბოძები: 0, 1, 2, 3 და ა.შ. 0-ბოძთად დგას მხედარი გაწვრთნილ ცხენზე. როდესაც მხედარი ამბობს რაიმე ნატურალურ რიცხვს, ცხენი აკეთებს ნახტომს წინ უახლოვეს ბოძთან, რომლის ნომერი იყოფა ამ რიცხვზე. მხედარმა თქვა რიცხვები 1-დან 10-მდე ჩათვლით თითო ჯერ რაღაცა მიმდევრობით. ყველაზე შორს რომელ ბოძთან შეიძლება ის აღმოჩნდეს? დაასაბუთეთ, რომ ეს ნომერი ყველაზე დიდია.

(მაგალითი: მხედარმა თქვა რიცხვები მიმდევრობით 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 - ცხენმა გააკეთა ნახტომები მე-10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, 41 ბოძებთან).

7. ლიზის აქვს სურვილი დაფაზე 6×6 შეღებოს სამი სხვადასხვა ზომის კვადრატი, რომლებიც არ ფარავენ ერთმანეთს. კვადრატების გვერდები გადიან დაფის უჯრებზე. ამ შეღებვის რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს? დაფის შემობრუნებით მიღებული ვარიანტები ითვლება სხვადასხვად.

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა

"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"

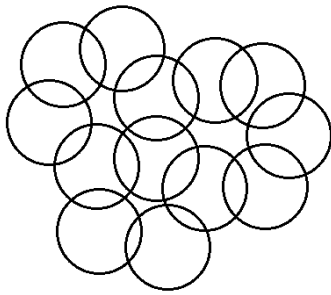
I ტური

VII კლასი

ყველა პასუხი აუცილებლად დაასაბუთეთ

1. შეიძლება თუ არა, რომ 44 ნატურალური რიცხვის ჯამი იყოს 4-ჯერ მეტი მათ ნამრავლზე?
2. ერთი ნატურალური რიცხვი 1-ით მეტია მეორეზე. შეიძლება თუ არა, რომ მათი ნამრავლი მთავრდებოდეს 2016?
3. შეიძლება თუ არა დავხაზოთ სამი სამკუთხედი ისე, რომ მათი თანაკვეთაც და გაერთიანებაც იყოს ამოზნექილი ოთხკუთხედი? (ოთხკუთხედს ჰქვია ამოზნექილი, თუ მისი ორივე დიაგონალი მთლიანად შიგნითაა).

4. სიბრტყეზე განლაგებულია წრეები ისე, როგორც ნაჩვენებია სურათზე.



თითოეულ წრეში შიგნით ჩასვით 3-3 წერტილი ისე, რომ წრის საზღვარზე ისინი არ მოხვდნენ. ყველაზე ცოტა რამდენი წერტილი გამოგივათ ჯამში?

5. მაგიდაზე დევს ტვირთები მასით 150, 151, 152 ..., 200 გრამი (თითო-თითო ჯერ). პეტრეს შეუძლია აიღოს ერთი ან რამდენიმე ტვირთი და აწონოს. რამდენი სხვადასხვა მასა შეიძლება მიიღოს მან?

6. ლიზის აქვს სურვილი დაფაზე 6×6 შეღებოს სამი სხვადასხვა ზომის კვადრატი, რომლებიც არ ფარავენ ერთმანეთს. კვადრატების გვერდები გადიან დაფის უჯრებზე. ამ შეღებვის რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს? დაფის შემოზღუდვებით მიღებული ვარიანტები ითვლება სხვადასხვად.

7. გოგონების სკოლაში ორი ნებისმიერი გოგონა ან მეგობრობს, ან მტრობს ერთმანეთს. სკოლა არის წარმატებული, თუ სრულდება ზუსტად ერთი პირობა ორიდან:

ა) არსებობს ისეთი 100 გოგონა $A_1, A_2, A_3 \dots A_{100}$, რომ A_1 მეგობრობს A_2 , A_2 მეგობრობს A_3 , ... A_{99} მეგობრობს A_{100} -თან;

ბ) არსებობს ისეთი 7 გოგონა $B_1, B_2, B_3 \dots B_7$, რომ B_1 მტრობს B_2 , B_3 მტრობს B_4 , B_6 მტრობს B_5 და B_7 -თან.

იპოვეთ გოგონების ყველაზე დიდი რაოდენობა, როდესაც სკოლა შეიძლება არ იყოს წარმატებული.

VIII კლასი

ყველა პასუხი აუცილებლად დაასაბუთეთ

1. შეიძლება თუ არა, რომ 44 ნატურალური რიცხვის ჯამი იყოს 4-ჯერ მეტი მათ ნამრავლზე?
2. წიგნიდან ამოვარდა 96 ფურცელი (თითო ფურცელი - ორი გვერდია). შეიძლება თუ არა, რომ ამ გვერდების ნომრების ჯამი 20170-ს უდრიდეს?
3. a, b, c, d, e, f - დადებითი რიცხვებია. იპოვეთ შემდეგი გამოსახულების შესაძლო მნიშვნელობები:

$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)} + \frac{cd}{(b+c)(d+e)} + \frac{ef}{(d+e)(f+a)}$$

4. ABCD პარალელოგრამის დიაგონალები E წერტილში იკვეთებიან, $\angle DAE$ და $\angle EBC$ ბისექტრისები კი F წერტილში. იპოვეთ $\angle AFB$, თუ ECFD პარალელოგრამია.
5. მაგიდაზე დევს ტვირთები მასით 150, 151, 152 ..., 200 გრამი (თითო-თითო ჯერ). პეტრეს შეუძლია აიღოს ერთი ან რამდენიმე ტვირთი და აწონოს. რამდენი სხვადასხვა მასა შეიძლება მიიღოს მან?
6. სამი სამკუთხედი დახაზულია ისე, რომ მათი თანაკვეთაც და გაერთიანება - ოთხკუთხედედია. შეიძლება თუ არა, რომ ამ ორ ოთხკუთხედს ერთად ჰქონდეს 6 მართი კუთხე?
7. გოგონების სკოლაში ორი ნებისმიერი გოგონა ან მეგობრობს, ან მტრობს ერთმანეთს. სკოლა არის წარმატებული, თუ სრულდება ზუსტად ერთი პირობა ორიდან:
 - ა) არსებობს ისეთი 100 გოგონა $A_1, A_2, A_3 \dots A_{100}$, რომ A_1 მეგობრობს A_2 , A_2 მეგობრობს $A_3, \dots A_{99}$ მეგობრობს A_{100} -თან;
 - ბ) არსებობს ისეთი 7 გოგონა $B_1, B_2, B_3 \dots B_7$, რომ B_1 მტრობს B_2, B_3 მტრობს B_4, B_6 მტრობს B_5 და B_7 -თან.იპოვეთ გოგონების ყველაზე დიდი რაოდენობა, როდესაც სკოლა შეიძლება არ იყოს წარმატებული.

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"

I ტური

IX კლასი

ყველა პასუხი აუცილებლად დაასაბუთეთ

1. შეიძლება თუ არა, რომ 44 ნატურალური რიცხვის ჯამი იყოს 4-ჯერ მეტი მათ ნამრავლზე?
2. 789-კუთხედის ყველა წვერო არის წითლად შეღებილი, ხოლო შიგნით დევს კიდევ 615 წითელი წერტილი. არცერთი 3 წერტილი არ დევს ერთ წრფეზე. მრავალკუთხედი გაყოფილია ისეთ სამკუთხედებად, რომლის წვეროები ყველა ეს წითელი წერტილია და მხოლოდ ისინი. რამდენია ეს სამკუთხედი?
3. a, b, c, d, e, f - დადებითი რიცხვებია. იპოვეთ შემდეგი გამოსახულების შესაძლო მნიშვნელობები:

$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)} + \frac{cd}{(b+c)(d+e)} + \frac{ef}{(d+e)(f+a)}$$

4. ABCD პარალელოგრამის დიაგონალები E წერტილში იკვეთებიან, $\angle DAE$ და $\angle EBC$ ბისექტრისები კი F წერტილში. იპოვეთ $\angle AFB$, თუ ECFD პარალელოგრამია.
5. საფოსტო ყუთის წახნაგების დიაგონალები 4, 6 და 7 დეციმეტრის ტოლია. დაეტევა თუ არა ამ ყუთში ბურთი დიამეტრით 2 დეციმეტრი?
6. ალექსიმ გადაწყვიტა შეეძინა მარკების სამი კომპლექტი - თავისთვის და ორი მეგობრისთვის. ერთი კომპლექტი შედგება A, B და C მარკებისაგან. ინტერნეტით მან იპოვა 3 მაღაზია, მაგრამ ყველგან მარკები იყიდებოდა წყვილ-წყვილად: პირველში A და B 200 ლარად, მეორეში B და C 300 ლარად და მესამეში C და A x ლარად. ალექსიმ დათვალა ფულის მინიმალური რაოდენობა, რომელიც სჭირდებოდა მარკების შესაძენად, ხოლო მერე გადაწყვიტა, რომ ეყიდა მარკები მხოლოდ ორ მაღაზიაში ამ სამიდან, რის გამოც მინიმალური თანხა გაიზარდა 120 ლარად. რის ტოლი შეიძლება იყოს x?
7. დაშალეთ ორწევრი $33x^4 + 578$ რაც შეიძლება ნაკლები რაოდენობის მთელკოეფიციენტის მრავალწევრების კვადრატების ჯამად.

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"

I ტური

X კლასი

ყველა პასუხი აუცილებლად დაასაბუთეთ

1. 789-კუთხედის ყველა წვერო არის წითლად შეღებილი, ხოლო შიგნით დევს კიდევ 615 წითელი წერტილი. არცერთი 3 წერტილი არ დევს ერთ წრფეზე. მრავალკუთხედი გაყოფილია ისეთ სამკუთხედებად, რომლის წვეროები ყველა ეს წითელი წერტილია და მხოლოდ ისინი. რამდენია ეს სამკუთხედი?
2. რა მაქსიმალური მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს $n^2 + 3$ და $(n+1)^2 + 3$ -ის უდიდესმა საერთო ჯერადმა, თუ n - ნატურალური რიცხვია?
3. საფოსტო ყუთის წახნაგების დიაგონალები 4, 6 და 7 დეციმეტრის ტოლია. დაეტევა თუ არა ამ ყუთში ბურთი დიამეტრით 2 დეციმეტრი?
4. ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდებზე აღებულია X და Y წერტილები ისე, რომ $AX = BY$. ამასთან A, X, Y და C წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობენ. წერტილი $B_1 \angle B$ ბისექტრისის ფუძეა. დაამტკიცეთ, რომ წრფეები XB_1 და YC პარალელურია.
5. ალექსიმ გადაწყვიტა შეეძინა მარკების სამი კომპლექტი - თავისთვის და ორი მეგობრისთვის. ერთი კომპლექტი შედგება A, B და C მარკებისაგან. ინტერნეტით მან იპოვა 3 მაღაზია, მაგრამ ყველგან მარკები იყიდებოდა წყვილ-წყვილად: პირველში A და B 200 ლარად, მეორეში B და C 300 ლარად და მესამეში C და A x ლარად. ალექსიმ დათვალა ფულის მინიმალური რაოდენობა, რომელიც სჭირდებოდა მარკების შესაძენად, ხოლო მერე გადაწყვიტა, რომ ეყიდა მარკები მხოლოდ ორ მაღაზიაში ამ სამიდან, რის გამოც მინიმალური თანხა გაიზარდა 120 ლარად. რის ტოლი შეიძლება იყოს x ?
6. დაშალეთ ორწევრი $6x^4 + 5$ რაც შეიძლება მეტი რაოდენობის მთელკოეფიციენტის მრავალწევრების კვადრატების ჯამად.
7. ოლიმპიადის ორგანიზატორები კენჭისყრით არჩევენ, რომელი ამოცანა - A თუ B - ჩასვან ვარიანტში. ამისათვის ორგანიზატორები რიგრიგობით ანბანის მიხედვით ამბობენ, რომელი ამოცანა მოსწონთ. კენჭისყრის შედეგად A-ამოცანამ "მოიგო" 11:5, თანაც კენჭისყრის ნებისმიერ მომენტში მას ჰქონდა მინიმუმ ორჯერ მეტი ხმა, ვიდრე B-ამოცანას. კენჭისყრის რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს?

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
 "ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"

I ტური

XI კლასი

ყველა პასუხი აუცილებლად დაასაბუთეთ

1. რამდენი ნატურალური n -თვის სრულდება უტოლობა: $\sin \frac{10\pi}{n} > \cos \frac{10\pi}{n}$?
2. რა მაქსიმალური მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს $n^2 + 3$ და $(n+1)^2 + 3$ -ის უდიდესმა საერთო ჯერადმა, თუ n - ნატურალური რიცხვია?
3. $2^x + 3^y$ სახის რიცხვები, სადაც x და y ნატურალური რიცხვებია ან 0 , დავარქვათ დამსახურებული რიცხვები. ადვილად ჩანს, რომ რიცხვები $5 = 2^1 + 3^1 = 2^2 + 3^0$ და $11 = 2^3 + 3^1 = 2^1 + 3^2$ - ორმაგ დამსახურებულია, რადგან მათი დაშლა ორ სხვადასხვა ვარიანტადაა შესაძლებელი. სულ რამდენი ორმაგ დამსახურებული რიცხვი არსებობს?
4. ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდებზე აღებულია X და Y წერტილები ისე, რომ AX = BY. ამასთან A, X, Y და C წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობენ. წერტილი B₁ ∠B ბისექტრისის ფუძეა. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირები XB₁ და YC პარალელურებია.
5. მამას აქვს სურვილი გაუგზავნოს შვილს 13 ერთნაირი ბურთი. ამისათვის მან იყიდა საფოსტო ყუთი, რომლის წახნაგების დიაგონალები 4, 6 და 7 დეციმეტრის ტოლია. აღმოჩნდა, რომ ერთი ბურთი ყუთში ეტევა. მართალია თუ არა, რომ მასში ჩაეტევა 13-ვე ბურთი?
6. ოლიმპიადის ორგანიზატორები კენჭისყრით არჩევენ, რომელი ამოცანა - A თუ B - ჩასვან ვარიანტში. ამისათვის ორგანიზატორები რიგრიგობით ანბანის მიხედვით ამბობენ, რომელი ამოცანა მოსწონთ. კენჭისყრის შედეგად A-ამოცანამ "მოიგო" 11:5, თანაც კენჭისყრის ნებისმიერ მომენტში მას ჰქონდა მინიმუმ ორჯერ მეტი ხმა, ვიდრე B-ამოცანას. კენჭისყრის რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს?
7. შეიძლება თუ არა, რომ კუბურმა მრავალწევრმა (ანუ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ სახის) მთელი კოეფიციენტებით x -ის მთელი მნიშვნელობისათვის იყოს 1, 2, 3 ან 4-ს ტოლი?