Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

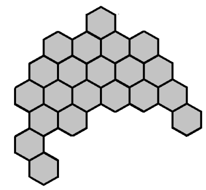
2016/2017 рік. Перший тур

Завдання для 5 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. Покажіть, як розрізати цю фігуру на три рівні частини.

   (Частини називаються рівними, якщо їх можна накласти одну на іншу так, щоб вони співпали.)



2. Одне натуральне число на 1 більше іншого. Чи може їхній добуток закінчуватися на 2017?

3. На столі лежать важки масою 180, 181, 182, ..., 200 грамів (по одному важку кожної маси). Чи можна вибрати з них декілька так, щоб їхня сумарна вага дорівнювала 1 кілограму?

4. На дошці записано 20 нулів і 17 одиниць. За один хід можна витерти будь-які два числа та записати замість них їхню суму. Хід називається важливим, якщо отримане в результаті цього ходу число більше, ніж кожне із витертих. Скільки важливих ходів буде зроблено, перш ніж на дошці залишиться єдине число?

5. У пакеті лежать декілька вироблених у різних країнах льодяників із різними смаками. Будь-які два льодяники в пакеті розрізняються або смаком, або країною виробництва, або і тим, і іншим. Якщо два льодяники в пакеті розрізняються як за смаком, так і за країною, то в пакеті знайдеться рівно один льодяник, який відрізняється від одного з них тільки смаком, а від іншого тільки країною. Відомо, що в пакеті рівно 5 льодяників зі смаком яблука і рівно 7 льодяників з Росії. Чому може дорівнювати кількість усіх льодяників у пакеті? Знайдіть усі можливі варіанти відповіді на питання.

6. Уздовж дороги стоять стовпчики, пронумеровані по порядку: 0, 1, 2, 3 і т. д. У стовпчика 0 стоїть вершник на дресированому коні. Коли вершник називає натуральне число, кінь стрибає вперед до найближчого стовпчика, номер якого ділиться на це число. Наїзник назвав числа від 1 до 10 по одному разу в якомусь порядку. Який максимально можливий номер стовпчика, у якого міг опинитися кінь? Доведіть, що він справді максимальний. (Приклад: якщо вершник називає числа в порядку 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, то шлях коня такий: 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, 41.)

7. Ліза хоче зафарбувати на дошці 6×6 два квадрати різних розмірів, які не мають спільних клітинок, так, щоб їхні контури йшли вздовж меж клітинок. Скількома способами вона може це зробити? (Способи, які отримуються один з одного поворотом дошки, вважаються різними.)

Міжнародна математична олімпіада «Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

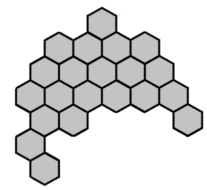
2016/2017 рік. Перший тур

Завдання для 6 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. Покажіть, як розрізати цю фігуру на три рівні частини.

   (Частини називаються рівними, якщо їх можна накласти одну на іншу так, щоб вони співпали.)



2. Одне натуральне число на 2 більше іншого. Чи може їхній добуток закінчуватися на 2017?

3. Олексій вирішив придбати два комплекти рідкісних марок (для себе та друга). Один комплект складається з трьох марок А, Б і В. В інтернеті він знайшов три магазини, але кожен з них продавав марки парами. Перший магазин продавав комплект «марка А + марка Б» за 200 рублів, другий продавав комплект «марка Б + марка В» за 300 рублів, а в третьому комплект «марка В + марка А» коштував x рублів. Олексій підрахував мінімальну кількість грошей, необхідну для покупки. Потім, однак, він подумав, що хотів би відвідати тільки якісь два магазини з цих трьох. Унаслідок цієї умови мінімальна необхідна кількість грошей збільшилася на 120 рублів. Чому міг дорівнювати x?

4. На площині розташовані кола, як показано на рисунку. Усередині кожного кола поставлено три точки, а на межі кіл немає жодної точки. Яка мінімально можлива загальна кількість точок?

5. У пакеті лежать декілька вироблених у різних країнах льодяників із різними смаками. Будь-які два льодяники в пакеті розрізняються або смаком, або країною виробництва, або і тим, і іншим. Якщо два льодяники в пакеті розрізняються як за смаком, так і за країною, то в пакеті знайдеться рівно один льодяник, який відрізняється від одного з них тільки смаком, а від іншого тільки країною. Відомо, що в пакеті рівно 5 льодяників зі смаком яблука і рівно 7 льодяників з Росії. Чому може дорівнювати кількість усіх льодяників у пакеті? Знайдіть усі можливі варіанти відповіді на питання.

6. Уздовж дороги стоять стовпчики, пронумеровані по порядку: 0, 1, 2, 3 і т. д. У стовпчика 0 стоїть вершник на дресированому коні. Коли вершник називає натуральне число, кінь стрибає вперед до найближчого стовпчика, номер якого ділиться на це число. Наїзник назвав числа від 1 до 10 по одному разу в якомусь порядку. Який максимально можливий номер стовпчика, у якого міг опинитися кінь? Доведіть, що він справді максимальний. (Приклад: якщо вершник називає числа в порядку 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, то шлях коня такий: 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, 41.)

7. Ліза хоче зафарбувати на дошці 6×6 три квадрати різних розмірів, які не мають спільних клітинок, так, щоб у них у всіх були різні розміри, а їхні контури йшли вздовж меж клітинок. Скількома способами вона може це зробити? (Способи, які отримуються один з одного поворотом дошки, вважаються різними.)

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2016/2017 рік. Перший тур

Завдання для 7 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. Чи може сума 44 натуральних чисел бути в 4 рази більше, ніж їхній добуток?

2. Одне натуральне число на 1 більше іншого. Чи може їхній добуток закінчуватися на 2016?

3. Чи можна намалювати три трикутники так, щоб їхні перетин і об'єднання були опуклими чотирикутниками? (Чотирикутник називається опуклим, якщо обидві його діагоналі проходять усередині нього.)

4. На площині розташовані кола, як показано на рисунку. Усередині кожного кола поставлено три точки, а на межі кіл немає жодної точки. Яка мінімально можлива загальна кількість точок?

5. На столі лежать важки масою 150, 151, 152, ..., 200 грамів (по одному важку кожної маси). Петя може вибрати один або кілька важків і зважити їх. Скільки різних мас він може отримати таким чином?

6. Ліза хоче зафарбувати на дошці 6×6 три квадрати різних розмірів, які не мають спільних клітинок, так, щоб у них у всіх були різні розміри, а їхні контури йшли вздовж меж клітинок. Скількома способами вона може це зробити? (Способи, які отримуються один з одного поворотом дошки, вважаються різними.)

7. У школі для дівчаток будь-які дві учениці або дружать, або ворогують між собою. Школа називається успішною, якщо виконується одна з наступних умов:
1) існують 100 дівчаток $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ таких, що A_1 дружить з A_2, A_2 дружить з A_3, ..., A_{99} дружить з A_{100};
2) існують 7 дівчаток $B_1, \ldots, B_7$ таких, що B_1 ворогує з B_2, B_3 — з B_4, а B_6 ворогує з B_5 і B_7.
Знайдіть максимальну кількість учениць, для якої школа може не виявитися успішною.

Міжнародна математична олімпіада «Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2016/2017 рік. Перший тур

Завдання для 8 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. Чи може сума 44 натуральних чисел бути в 4 рази більше, ніж їхній добуток?

2. З книжки випав фрагмент, що складається з 96 аркушів (кожний аркуш — це пара сторінок). Чи може сума номерів всіх цих сторінок дорівнювати 20170?

3. Нехай a, b, c, d, e, f — додатні числа. Яких значень може набувати вираз
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)} + \frac{cd}{(b+c)(d+e)} + \frac{e}{(d+e)(f+a)}?$$

4. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці E. Бісектриси кутів DAE і EBC перетинаються в точці F. Знайдіть величину кута AFB, якщо $ECFD$ — паралелограм.

5. На столі лежать важки масою 150, 151, 152, . . . , 200 грамів (по одному важку кожної маси). Петя може вибрати один або кілька важків і зважити їх. Скільки різних мас він може отримати таким чином?

6. Три трикутники розташовано так, що їхні перетин і об'єднання — чотирикутники. Чи можуть ці два чотирикутники мати разом 6 прямих кутів?

7. У школі для дівчаток будь-які дві учениці або дружать, або ворогують між собою. Школа називається успішною, якщо виконується одна з наступних умов:
1) існують 100 дівчаток $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ таких, що A_1 дружить з A_2, A_2 дружить з A_3, $\ldots$, A_{99} дружить з A_{100};
2) існують 7 дівчаток $B_1, \ldots, B_7$ таких, що B_1 ворогує з B_2, B_3 — з B_4, а B_6 ворогує з B_5 і B_7.
Знайдіть максимальну кількість учениць, для якої школа може не виявитися успішною.

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2016/2017 рік. Перший тур

Завдання для 9 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. З книжки випав фрагмент, що складається з 96 аркушів (кожний аркуш — це пара сторінок). Чи може сума номерів всіх цих сторінок дорівнювати 20170?

2. Усі вершини 789-кутника помічені червоним кольором, а всередині нього лежать ще 615 червоних точок. Жодні три червоні точки не лежать на одній прямій. Многокутник розбитий на трикутники, вершинами яких є всі червоні точки й тільки вони. Скільки цих трикутників?

3. Нехай a, b, c, d, e, f — додатні числа. Яких значень може набувати вираз
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)}+\frac{cd}{(b+c)(d+e)}+\frac{e}{(d+e)(f+a)}?$$

4. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці E. Бісектриси кутів DAE і EBC перетинаються в точці F. Знайдіть величину кута AFB, якщо $ECFD$ — паралелограм.

5. Діагоналі граней поштової скриньки дорівнюють 4, 6 і 7 дециметрів. Чи поміститься м'яч діаметром 2 дециметри в такий ящик?

6. Олексій вирішив купити три комплекти рідкісних марок (для себе та двох друзів). Один комплект складається з трьох марок А, Б і В. В інтернеті він знайшов три магазини, але кожен з них продавав марки парами. Перший магазин продавав комплект «марка А + марка Б» за 200 рублів, другий продавав комплект «марка Б + марка В» за 300 рублів, а в третьому комплект «марка В + марка А» коштував x рублів. Олексій підрахував мінімальну кількість грошей, необхідну для покупки. Потім, однак, він подумав, що хотів би відвідати тільки якісь два магазини з цих трьох. Унаслідок цієї умови мінімальна необхідна кількість грошей збільшилася на 120 рублів. Чому міг дорівнювати x?

7. Подайте двочлен $33x^4+578$ у вигляді суми квадратів як можна меншого числа многочленів із цілими коефіцієнтами.

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2016/2017 рік. Перший тур

Завдання для 10 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. Усі вершини 789-кутника помічені червоним кольором, а всередині нього лежать ще 615 червоних точок. Жодні три червоні точки не лежать на одній прямій. Многокутник розбитий на трикутники, вершинами яких є всі червоні точки й тільки вони. Скільки цих трикутників?

2. Якого максимального значення може набувати найбільший спільний дільник чисел n^2+3 та $(n+1)^2+3$, де n — натуральне число?

3. Діагоналі граней поштової скриньки дорівнюють 4, 6 і 7 дециметрів. Чи поміститься м'яч діаметром 2 дециметри в такий ящик?

4. На сторонах AB і BC трикутника ABC обрано точки X та Y так, що $AX = BY$; при цьому точки A, X, Y і C лежать на одному колі. B_1 — основа бісектриси кута B. Доведіть, що прямі XB_1 і YC паралельні.

5. Олексій вирішив купити три комплекти рідкісних марок (для себе та двох друзів). Один комплект складається з трьох марок А, Б і В. В інтернеті він знайшов три магазини, але кожен з них продавав марки парами. Перший магазин продавав комплект «марка А + марка Б» за 200 рублів, другий продавав комплект «марка Б + марка В» за 300 рублів, а в третьому комплект «марка В + марка А» коштував x рублів. Олексій підрахував мінімальну кількість грошей, необхідну для покупки. Потім, однак, він подумав, що хотів би відвідати тільки якісь два магазини з цих трьох. Унаслідок цієї умови мінімальна необхідна кількість грошей збільшилася на 120 рублів. Чому міг дорівнювати x?

6. Подайте двочлен $6x^4+5$ у вигляді суми квадратів як можна більшого числа многочленів із цілими коефіцієнтами.

7. Укладачі олімпіади голосуванням визначають, яку із задач (А чи Б) включити у комплект. Для цього всі укладачі по черзі (в алфавітному порядку) повідомляють, яка із задач їм більше подобається. Внаслідок голосування виявилося, що задача А «перемогла» з рахунком 11:5, причому в кожен момент вона мала принаймні вдвічі більше голосів, ніж задача Б. Скількома способами могло проходити голосування?

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2016/2017 рік. Перший тур

Завдання для 11 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. При скількох натуральних n виконано нерівність
$$\sin\frac{10\pi}{n} > \cos\frac{10\pi}{n}?$$

2. Якого максимального значення може набувати найбільший спільний дільник чисел n^2+3 та $(n+1)^2+3$, де n — натуральне число?

3. Назвемо заслуженими числа виду 2^x+3^y, де x та y — натуральні числа або 0. Легко бачити, що числа $5 = 2^1+3^1 = 2^2+3^0$ і $11 = 2^3+3^1 = 2^1+3^2$ — двічі заслужені (тобто подаються у такому вигляді двома способами). А скільки всього існує двічі заслужених чисел?

4. На сторонах AB і BC трикутника ABC обрано точки X та Y так, що $AX = BY$; при цьому точки A, X, Y і C лежать на одному колі. B_1 — основа бісектриси кута B. Доведіть, що прямі XB_1 і YC паралельні.

5. Батько хоче відправити синові 13 однакових м'ячиків. Для цього він купив поштову скриньку, діагоналі граней якої дорівнюють 4, 6 і 7 дециметрам. Виявилося, що один м'яч поміщається в цей ящик. Чи вірно, що в ній можна вмістити всі 13 м'ячів?

6. Укладачі олімпіади голосуванням визначають, яку із задач (А чи Б) включити у комплект. Для цього всі укладачі по черзі (в алфавітному порядку) повідомляють, яка із задач їм більше подобається. Внаслідок голосування виявилося, що задача А «перемогла» з рахунком 11:5, причому в кожен момент вона мала принаймні вдвічі більше голосів, ніж задача Б. Скількома способами могло проходити голосування?

7. Чи може кубічний многочлен (тобто многочлен виду $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, $a \neq 0$) з цілими коефіцієнтами приймати кожне зі значень 1, 2, 3, 4 для якихось цілих значень x?