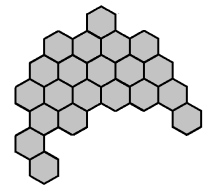
International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «Third Millennium»
Anul 2016/2017, Etapa 1

Probleme pentru clasa R5

Nu uita sa iti demonstrezi raspunsurile!

1. Arata cum poti imparti figura de mai jos in trei parti egale.

   (Partile se numesc egale daca este posibil sa suprapui o parte pe cealalta si acestea sa coincida in urma procesului.)



2. Un numar intreg pozitiv este mai mare cu 1 decat un alt numar. Poate produsul lor sa se termine in 2017?

3. Greutati de 180, 181, 182, ..., 200 de grame sunt asezate pe o masa (exact o greutate pentru fiecare valoare). Este posibil sa alegi cateva dintre ele astfel incat masa lor totala sa fie 1 kg?

4. 20 cifre de 0 si 17 cifre de 1 sunt scrise pe o tabla. Printr-o singura miscare iti este permis sa stergi 2 numere de pe tabla si sa scrii suma lor in locul acestora. Acest procedeu se repeta pana cand pe tabla ramane un singur numar. O miscare este numita *importanta* daca numarul rezultat dintr-o miscare este mai mare decat fiecare dintre cele 2 numere sterse in acea miscare. Cate miscari *importante* pot fi efectuate de-a lungul unui proces? Gaseste toate posibilitatile (si explica de ce nu mai exista si alte posibilitati).

5. Cateva bomboane cu diferite arome, produse in tari diferite, se afla intr-un pachet. Fiecare 2 bomboane au arome diferite ori sunt produse in tari diferite ori ambele. Daca 2 bomboane difera prin ambele atribute (tara si aroma), atunci exista exact o bomboana care difera doar prin tara fata de una din acele 2 bomboane si difera doar prin aroma fata de cealalta. Se stie ca se afla exact 5 bomboane cu aroma de mere si exact 7 bomboane din Rusia in pachet. Cat de multe bomboane pot fi in total? Gaseste toate raspunsurile posibile (si demonstreaza, de asemenea, ca nu mai exista altele).

6. Mai multi stalpi se afla de-a lungul unei strazi, numerotati in ordine: 0, 1, 2, 3 si asa mai departe. Un om se afla pe un cal in dreptul stalpului cu numarul 0. Cand omul spune un numar natural n, calul sare de-a lungul strazii pana la cel mai apropiat stalp numerotat cu un numar divizibil cu n. Omul a spus numerele de la 1 la 10 intr-o ordine oarecare si calul s-a oprit in dreptul unui stalp. Gaseste, cu demonstratie, numarul maxim care reprezinta stalpul in dreptul caruia se opreste calul la final. (Exemplu: daca omul spune numerele in ordinea urmatoare: 10, 9, 8, 7, ..., 1, atunci calul sare la 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40 si 41).

7. Liz vrea sa coloreze 2 patrate de marimi diferite pe o tabla 6×6, astfel incat laturile lor sa fie de-a lungul liniilor tabelului si patratele nu au celule comune. In cate moduri poate face ea acest lucru? (2 moduri obtinute unul dintr-altul prin rotatie sunt tratate ca fiind 2 moduri diferite).

International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «Third Millennium»

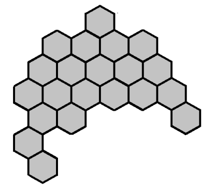
Anul 2016/2017, Etapa 1

Probleme pentru clasa R6

Nu uita sa iti demonstrezi raspunsurile!

1. Arata cum poti imparti figura de mai jos in trei parti egale.

   (Partile se numesc egale daca este posibil sa suprapui o parte pe cealalta si acestea sa coincida in urma procesului.)

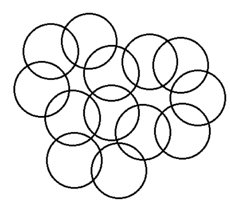


2. Un numar intreg pozitiv este mai mare cu 2 decat un alt numar. Poate produsul lor sa se termine in 2017?

3. Alex a hotarat sa cumpere 2 seturi egale de timbre rare (pentru el si pentru un prieten). Fiecare set contine 3 timbre A, B si C. El a gasit 3 magazine pe internet; fiecare dintre ele vindea timbre in perechi. Primul magazine vindea urmatorul set: «timbrul A + timbrul B» = 200 ruble, al doilea vindea setul: «timbrul B + timbrul C» = 300 ruble si al treilea magazin vindea setul «timbrul A + timbrul C» = x ruble. Alex a calculat suma minima de bani necesara pentru a isi atinge scopul. Apoi el a hotarat sa viziteze doar 2 din aceste 3 magazine si suma de bani necesara a crescut cu 120 de ruble. Gaseste toate valorile lui x.

4. Cateva cercuri se afla in acelasi plan (vezi figura).

   3 puncte sunt marcate in interiorul fiecarui cerc si nu exista puncte marcate pe niciunul din cercuri. Care este numarul minim total de puncte marcate? Explicati raspunsul.



5. Cateva bomboane cu diferite arome, produse in tari diferite, se afla intr-un pachet. Fiecare 2 bomboane au arome diferite ori sunt produse in tari diferite ori ambele. Daca 2 bomboane difera prin ambele atribute (tara si aroma), atunci exista exact o bomboana care difera doar prin tara fata de una din acele 2 bomboane si difera doar prin aroma fata de cealalta. Se stie ca se afla exact 5 bomboane cu aroma de mere si exact 7 bomboane din Rusia in pachet. Cat de multe bomboane pot fi in total? Gaseste toate raspunsurile posibile (si demonstreaza, de asemenea, ca nu mai exista altele).

6. Mai multi stalpi se afla de-a lungul unei strazi, numerotati in ordine: 0, 1, 2, 3 si asa mai departe. Un om se afla pe un cal in dreptul stalpului cu numarul 0. Cand omul spune un numar natural n, calul sare de-a lungul strazii pana la cel mai apropiat stalp numerotat cu un numar divizibil cu n. Omul a spus numerele de la 1 la 10 intr-o ordine oarecare si calul s-a oprit in dreptul unui stalp. Gaseste, cu demonstratie, numarul maxim care reprezinta stalpul in dreptul caruia se opreste calul la final. (Exemplu: daca omul spune numerele in ordinea urmatoare: 10, 9, 8, 7, $\ldots$, 1, atunci calul sare la 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40 si 41).

7. Liz vrea sa coloreze 3 patrate de marimi diferite pe o tabla 6×6, astfel incat laturile lor sa fie de-a lungul liniilor tabelului si patratele nu au celule comune. In cate moduri poate face ea acest lucru? (2 moduri obtinute unul dintr-altul prin rotatie sunt tratate ca fiind 2 moduri diferite).

International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «Third Millennium»

Anul 2016/2017, Etapa 1

Probleme pentru clasa R7

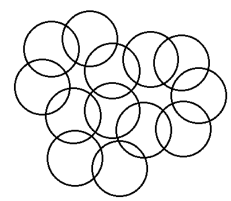
Nu uita sa iti demonstrezi raspunsurile!

1. Poate suma a 44 numere naturale sa fie de 4 ori mai mare decat produsul lor?

2. Un numar intreg pozitiv este mai mare cu 1 decat un alt numar. Poate produsul lor sa se termine in 2016?

3. Poate cineva sa construiasca 3 triunghiuri astfel incat atat intersectia lor, cat si reuniunea lor sa fie patrulatere convexe? Un patrulater se numeste convex daca ambele diagonale trec prin interiorul lui.

4. Cateva cercuri se afla in acelasi plan (vezi figura). 3 puncte sunt marcate in interiorul fiecarui cerc si nu exista puncte marcate pe niciunul din cercuri. Care este numarul minim total de puncte marcate? Explicati raspunsul.



5. Greutati de 150, 151, 152, ..., 200 de grame se afla pe o masa (exact o greutate pentru fiecare valoare). Peter cantareste diferite seturi de greutati (fiecare set contine cel putin o greutate). Cate rezultate diferite poate obtine el?

6. Liz vrea sa coloreze 3 patrate de marimi diferite pe o tabla 6×6, astfel incat laturile lor sa fie de-a lungul liniilor tabelului si patratele nu au celule comune. In cate moduri poate face ea acest lucru? (2 moduri obtinute unul dintr-altul prin rotatie sunt tratate ca fiind 2 moduri diferite).

7. Intr-o scoala de fete, fiecare 2 fete fie se plac, fie se urasc una pe cealalta si aceste sentimente sunt reciproce. O scoala este denumita *de success* daca satisface cel putin una din urmatoarele conditii:

   (a) exista 100 de fete $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ astfel incat A_1 o place pe A_2, A_2 o place pe A_3, ..., A_{99} o place pe A_{100};

   (b) exista 7 fete $B_1, \ldots, B_7$ astfel incat B_1 o uraste pe B_2, B_3 o uraste pe B_4, si B_6 o uaste pe B_5 si B_7.

   Gaseste numarul maxim de fete din scoala care nu pot fi *de success*.

International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «Third Millennium»

Anul 2016/2017, Etapa 1

Probleme pentru clasa R8

Nu uita sa iti demonstrezi raspunsurile!

1. Poate suma a 44 numere naturale sa fie de 4 ori mai mare decat produsul lor?

2. Un fragment format din 96 de file a fost rupt dintr-o carte (fiecare fila contine 2 pagini). Poate suma numerelor tuturor acestor pagini rupte sa fie egala cu 20170?

3. Fie a, b, c, d, e, f numere pozitive. Gaseste toate valorile posibile pentru urmatoarea expresie:
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)} + \frac{cd}{(b+c)(d+e)} + \frac{ef}{(d+e)(f+a)}.$$

4. Fie E punctul de intersectie al diagonalelor intr-un paralelogram $ABCD$. Bisectoarele unghiurilor DAE si EBC se intersecteaza in punctul F. Gaseste masura unghiului AFB daca $ECFD$ este un paralelogram.

5. Greutati de 150, 151, 152, ..., 200 de grame se afla pe o masa (exact o greutate pentru fiecare valoare). Peter cantareste diferite seturi de greutati (fiecare set contine cel putin o greutate). Cate rezultate diferite poate obtine el?

6. 3 triunghiuri sunt construite intr-un plan astfel incat intersectia si reuniunea lor sunt patrulatere. Pot aceste 2 patrulatere sa aiba 6 unghiuri drepte in total?

7. Intr-o scoala de fete, fiecare 2 fete fie se plac, fie se urasc una pe cealalta si aceste sentimente sunt reciproce. O scoala este denumita *de success* daca satisface cel putin una din urmatoarele conditii:

   (a) exista 100 de fete $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ astfel incat A_1 o place pe A_2, A_2 o place pe A_3, ..., A_{99} o place pe A_{100};

   (b) exista 7 fete $B_1, \ldots, B_7$ astfel incat B_1 o uraste pe B_2, B_3 o uraste pe B_4, si B_6 o uaste pe B_5 si B_7.

   Gaseste numarul maxim de fete din scoala care nu pot fi *de success*.

International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «Third Millennium»

Anul 2016/2017, Etapa 1

Probleme pentru clasa R9

Nu uita sa iti demonstrezi raspunsurile!

1. Un fragment format din 96 de file a fost rupt dintr-o carte (fiecare fila contine 2 pagini). Poate suma numerelor tuturor acestor pagini rupte sa fie egala cu 20170?

2. Toate varfurile unui 789-gon (figura geometrica cu 789 de laturi) sunt marcate cu rosu, iar alte 615 puncte rosii se afla in interiorul lui. Nu exista 3 puncte rosii coliniare. Poligonul este impartit in triunghiuri astfel incat toate punctele rosii reprezinta varfurile triunghiurilor. Cate triunghiuri exista?

3. Fie a, b, c, d, e, f numere pozitive. Gaseste toate valorile posibile pentru urmatoarea expresie:
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)}+\frac{cd}{(b+c)(d+e)}+\frac{ef}{(d+e)(f+a)}.$$

4. Fie E punctul de intersectie al diagonalelor intr-un paralelogram $ABCD$. Bisectoarele unghiurilor DAE si EBC se intersecteaza in punctul F. Gaseste masura unghiului AFB daca $ECFD$ este un paralelogram.

5. Diagonalele fetelor unei cutii sub forma de paralelipiped dreptunghic au lungimile de 4, 6 si respectiv 7 decimetri. Putem introduce o minge cu diametrul de 2 decimetri in aceasta cutie?

6. Alex a hotarat sa cumpere 3 seturi egale de timbre rare (pentru el si pentru alti 2 prieteni). Fiecare set contine 3 timbre A, B si C. El a gasit 3 magazine pe internet; fiecare dintre ele vindea timbre in perechi. Primul magazine vindea urmatorul set: «timbrul A + timbrul B» $= 200$ ruble, al doilea vindea setul: «timbrul B + timbrul C» $= 300$ ruble si al treilea magazin vindea setul «timbrul A + timbrul C» $= x$ ruble. Alex a calculat suma minima de bani necesara pentru a isi atinge scopul. Apoi el a hotarat sa viziteze doar 2 din aceste 3 magazine si suma de bani necesara a crescut cu 120 de ruble. Gaseste toate valorile lui x.

7. Exprima $33x^4+578$ ca suma a cat mai putinor patrate perfecte a unor functii polinomiale cu coeficienti intregi.

International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «Third Millennium»

Anul 2016/2017, Etapa 1

Probleme pentru clasa R10

Nu uita sa iti demonstrezi raspunsurile!

1. Toate varfurile unui 789-gon (figura geometrica cu 789 de laturi) sunt marcate cu rosu, iar alte 615 puncte rosii se afla in interiorul lui. Nu exista 3 puncte rosii coliniare. Poligonul este impartit in triunghiuri astfel incat toate punctele rosii reprezinta varfurile triunghiurilor. Cate triunghiuri exista?

2. Pentru un numar intreg n, care este cea mai mare valoare posibila a celui mai mare divizor comun al expresiilor n^2+3 si $(n+1)^2+3$?

3. Diagonalele fetelor unei cutii sub forma de paralelipiped dreptunghic au lungimile de 4, 6 si respectiv 7 decimetri. Putem introduce o minge cu diametrul de 2 decimetri in aceasta cutie?

4. Pe laturile AB si BC ale triunghiului ABC, se considera punctele X si Y, astfel incat $AX = BY$. Punctele A, X, Y si C se afla pe acelasi cerc. Fie B_1 piciorul bisectoarei unghiului B. Demonstreaza ca dreptele XB_1 si YC sunt paralele.

5. Alex a hotarat sa cumpere 3 seturi egale de timbre rare (pentru el si pentru alti 2 prieteni). Fiecare set contine 3 timbre A, B si C. El a gasit 3 magazine pe internet; fiecare dintre ele vindea timbre in perechi. Primul magazine vindea urmatorul set: «timbrul A + timbrul B» $= 200$ ruble, al doilea vindea setul: «timbrul B + timbrul C» $= 300$ ruble si al treilea magazin vindea setul «timbrul A + timbrul C» $= x$ ruble. Alex a calculat suma minima de bani necesara pentru a isi atinge scopul. Apoi el a hotarat sa viziteze doar 2 din aceste 3 magazine si suma de bani necesara a crescut cu 120 de ruble. Gaseste toate valorile lui x.

6. Exprima $6x^4+5$ ca suma a cat mai multe patrate perfecte a unor functii polinomiale cu coeficienti intregi.

7. Juriul de la Olimpiada alege pe care problema (A sau B) sa o foloseasca. Toti membrii juriului, unul cate unul, in ordine alfabetica, voteaza pentru una dintre probleme. In cele din urma, Problema A a primit 11 voturi iar Problema B a primit doar 5. Mai mult, dupa fiecare vot nou problema A avea de cel putin 2 ori mai multe voturi decat avea problema B. In cate moduri diferite poate vota juriul?

International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «Third Millennium»
Anul 2016/2017, Etapa 1

Probleme pentru clasa R11

Nu uita sa iti demonstrezi raspunsurile!

1. Cate numere naturale n satisfac inegalitatea
$$\sin\frac{10\pi}{n} > \cos\frac{10\pi}{n}?$$

2. Pentru un numar intreg n, care este cea mai mare valoare posibila a celui mai mare divizor comun al expresiilor n^2+3 si $(n+1)^2+3$?

3. Consideram numerele ca fiind *simpatice* daca ele pot fi scrise sub forma 2^x+3^y, unde x si y sunt numere naturale. Este usor de observat ca numerele $5 = 2^1+3^1 = 2^2+3^0$ si $11 = 2^3+3^1 = 2^1+3^2$ sunt de 2 ori *simpatice* deoarece ele pot fi scrise sub acea forma in 2 moduri. Cate numere de 2 ori *simpatice* exista?

4. Pe laturile AB si BC ale triunghiului ABC, se considera punctele X si Y, astfel incat $AX = BY$. Punctele A, X, Y si C se afla pe acelasi cerc. Fie B_1 piciorul bisectoarei unghiului B. Demonstreaza ca dreptele XB_1 si YC sunt paralele.

5. Tatal vrea sa ii trimita fiului lui 13 bile intr-o cutie. El a cumparat o cutie sub forma unui paralelipiped dreptunghic avand lungimile diagonalelor fetelor egale cu 4, 6 si respectiv 7 decimetri. S-a dovedit ca o bila poate incapea in cutie. Pot toate cele 13 bile sa incapa in acea cutie?

6. Juriul de la Olimpiada alege pe care problema (A sau B) sa o foloseasca. Toti membrii juriului, unul cate unul, in ordine alfabetica, voteaza pentru una dintre probleme. In cele din urma, Problema A a primit 11 voturi iar Problema B a primit doar 5. Mai mult, dupa fiecare vot nou problema A avea de cel putin 2 ori mai multe voturi decat avea problema B. In cate moduri diferite poate vota juriul?

7. Poate un polinom de gradul 3 (exemplu: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d, a \neq 0$) cu coeficienti intregi sa ia valorile 1, 2, 3, 4 pentru unele valori intregi ale lui x?