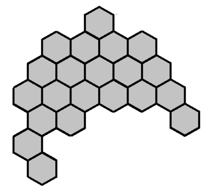
Olympiade internationale de mathématiques
“Formule d'Unité”/ “Troisième millénaire

Année 2016/2017. Tour 1

Sujet pour le niveau R5

N'oubliez pas de justifier toutes vos réponses!

1. Découper la figure ci-contre en trois parties superposables.



2. On considère deux nombres entiers n et $n+1$. Est-ce que leur produit peut se terminer par 2017?

3. Des poids de masse 180 g, 181 g, 182 g, …, 200 g sont posés sur la table (un poids de chaque masse). Est-il possible d'en choisir quelques-uns de sorte que la masse totale de ces poids soit exactement 1 kg?

4. Au tableau le nombre 0 est écrit 20 fois et le nombre 1 est écrit 17 fois. En un tour on peut effacer deux nombres et écrire leur somme à la place. Un tour est dit important si le nombre qu'on a écrit est plus grand que chacun des deux nombres effacés. Combien de tours importants seront faits avant qu'il ne reste qu'un seul nombre au tableau?

5. Dans un sachet de bonbons il y a des bonbons de goûts différents et produits dans des pays différents. Deux bonbons pris au hasard sont soit de goûts différents, soit produits dans deux pays différents, soit les deux. Si deux bonbons ont le goût différent et sont produits dans deux pays différents, alors dans le reste du sachet il y a un et un seul bonbon qui n'a pas le même goût que l'un (mais vient du même pays) et ne vient pas du même pays (mais a le même gout) que l'autre. On sait qu'il y a exactement 5 bonbons au goût de pomme et exactement 7 bonbons venant de Russie. Combien de bonbons peut-il y avoir dans ce sachet? Trouver toutes les réponses possibles.

6. Des panneaux numérotés 0, 1, 2, 3 etc sont placés le long d'une route. Un cavalier sur un cheval bien dressé se trouve à côté du panneau numéroté 0. Quand il nomme un nombre entier, le cheval saute jusqu'au prochain panneau avec un multiple de ce nombre. Le cavalier a prononcé les nombres de 1 à 10 dans un certain ordre. Quel est le nombre maximal que peut porter le panneau où se trouve le cheval à la fin? Montrer que c'est vraiment le nombre maximal. (Exemple. Si le cavalier a dit les nombres dans l'ordre 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, alors le cheval a sauté d'abord vers le panneau 10, puis 18, 24,28, 30, 35, 36, 39, 40, 41.)

7. Lisa veut colorier deux carrés sur un damier 6×6. Ils doivent être de taille différente, leurs côtés doivent suivre les lignes de quadrillage et ils ne doivent pas avoir de cases en commun. De combien de façons différentes peut-elle le faire? Des façons qui s'obtiennent l'une à partir de l'autre en tournant le damier sont considérées comme différentes.

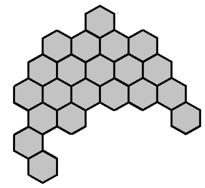
Olympiade internationale de mathématiques
“Formule d’Unité”/ “Troisième millénaire

Année 2016/2017. Tour 1

Sujet pour le niveau R6

N’oubliez pas de justifier toutes vos réponses!

1. Découper la figure ci-contre en trois parties superposables.

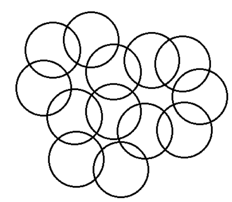


2. On considère deux nombres entiers n et $n+2$. Est-ce que leur produit peut se terminer par 2017?

3. Alex a décidé d’acheter deux jeux de timbres rares: un pour lui-même et un pour un ami. Chaque jeu est composé de trois timbres A,B et C. Il a trouve trois sites qui en vendent sur Internet. Le premier vend les timbres A et B à 200 euros pour les deux timbres, le deuxième vend les timbres B et C à 300 euros pour les deux timbres, et le troisième vend les timbres B et C à x euros pour les deux timbres. Il a calculé la somme totale d’argent nécessaire pour l’achat. Mais ensuite il a décidé qu’il aimerait bien visiter seulement deux sites parmi ces trois. Mais pour le faire, il lui faudra au minimum encore 120 euros. Quel pouvait être le tarif x du troisième site?

4. Des cercles sont tracés dans un plan comme sur la figure ci-contre.

   À l’intérieur de chaque cercle on place trois points, mais aucun n’est placé sur le cercle. Quel est le nombre minimal de points qu’on peut placer?



5. Dans un sachet de bonbons il y a des bonbons de goûts différents et produits dans des pays différents. Deux bonbons pris au hasard sont soit de goûts différents, soit produits dans deux pays différents, soit les deux. Si deux bonbons ont le goût différent et sont produits dans deux pays différents, alors dans le reste du sachet il y a un et un seul bonbon qui n’a pas le même goût que l’un (mais vient du même pays) et ne vient pas du même pays (mais a le même gout) que l’autre. On sait qu’il y a exactement 5 bonbons au goût de pomme et exactement 7 bonbons venant de Russie. Combien de bonbons peut-il y avoir dans ce sachet? Trouver toutes les réponses possibles.

6. Des panneaux numérotés 0, 1, 2, 3 etc sont placés le long d’une route. Un cavalier sur un cheval bien dressé se trouve à côté du panneau numéroté 0. Quand il nomme un nombre entier, le cheval saute jusqu’au prochain panneau avec un multiple de ce nombre. Le cavalier a prononcé les nombres de 1 à 10 dans un certain ordre. Quel est le nombre maximal que peut porter le panneau où se trouve le cheval à la fin? Montrer que c’est vraiment le nombre maximal. (Exemple. Si le cavalier a dit les nombres dans l’ordre 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, alors le cheval a sauté d’abord vers le panneau 10, puis 18, 24,28, 30, 35, 36, 39, 40, 41.)

7. Lisa veut colorier trois carrés sur un damier 6×6. Ils doivent être de taille différente, leurs côtés doivent suivre les lignes de quadrillage et ils ne doivent pas avoir de cases en commun. De combien de façons différentes peut-elle le faire? Des façons qui s’obtiennent l’une à partir de l’autre en tournant le damier sont considérées comme différentes.

Olympiade internationale de mathématiques
"Formule d'Unité"/ "Troisième millénaire

Année 2016/2017. Tour 1

Sujet pour le niveau R7

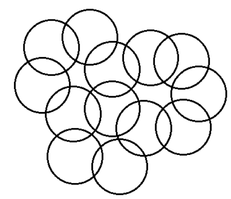
N'oubliez pas de justifier toutes vos réponses!

1. Est-il possible que la somme de 44 entiers naturels strictement positifs soit 4 fois plus grande que leur produit?

2. On considère deux nombres entiers n et $n + 1$. Est-ce que leur produit peut se terminer par 2016?

3. Est-il possible de tracer trois triangles de sorte que leur intersection et leur réunion soient des quadrilatères convexes? On dit qu'un quadrilatère est convexe si ses diagonales se trouvent à l'intérieur de ce quadrilatère.

4. Des cercles sont tracés dans un plan comme sur la figure ci-contre. À l'intérieur de chaque cercle on place trois points, mais aucun n'est placé sur le cercle. Quel est le nombre minimal de points qu'on peut placer?



5. Des poids de masse 150 g, 151 g, 152 g, ..., 200 g sont posés sur la table (un poids de chaque masse). On peut prendre un ou plusieurs poids à la fois et les peser. Combien de masses différentes peut-on obtenir?

6. Lisa veut colorier trois carrés sur un damier 6×6. Ils doivent être de taille différente, leurs côtés doivent suivre les lignes de quadrillage et ils ne doivent pas avoir de cases en commun. De combien de façons différentes peut-elle le faire? Des façons qui s'obtiennent l'une à partir de l'autre en tournant le damier sont considérées comme différentes.

7. Dans une école de filles, deux filles prises au hasard sont soit amies soit ennemies. On dit que l'école est performante si au moins une des deux conditions suivantes est vérifiée:

   (a) Il existe 100 filles $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ telles que A_1 est amie avec A_2, A_2 est amie avec A_3, ..., A_{99} est amie avec A_{100};

   (b) Il existe 7 filles $B_1, \ldots, B_7$ telles que B_1 est ennemie avec B_2, B_3 est ennemie avec B_4, et B_6est ennemie avec B_5 et B_7.

   Quel est le nombre maximal d'élèves pour que l'école puisse ne pas être performante?

Olympiade internationale de mathématiques
"Formule d'Unité"/ "Troisième millénaire

Année 2016/2017. Tour 1

Sujet pour le niveau R8

N'oubliez pas de justifier toutes vos réponses!

1. Est-il possible que la somme de 44 entiers naturels strictement positifs soit 4 fois plus grande que leur produit?

2. Un fragment de 96 feuilles (consécutives) est tombé d'un livre. Est-il possible que la somme des numéros de toutes les pages (il y a deux pages sur une feuille) soit 20170?

3. Soit a, b, c, d, e, f cinq nombres strictement positifs. Quelles valeurs peut prendre l'expression suivante:
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)} + \frac{cd}{(b+c)(d+e)} + \frac{ef}{(d+e)(f+a)}?$$

4. Soit un parallélogramme $ABCD$ et E le point d'intersection de ses diagonales. Soit F le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{EBC}$. Si $ECFD$ est un parallélogramme, quelle est alors la mesure de l'angle $\widehat{AFB}$?

5. Des poids de masse 150 g, 151 g, 152 g, ..., 200 g sont posés sur la table (un poids de chaque masse). On peut prendre un ou plusieurs poids à la fois et les peser. Combien de masses différentes peut-on obtenir?

6. Trois triangles sont tracés de sorte que leur intersection et leur réunion soient des quadrilatères. Est-il possible que ces deux quadrilatères aient 6 angles droits à eux deux?

7. Dans une école de filles, deux filles prises au hasard sont soit amies soit ennemies. On dit que l'école est performante si au moins une des deux conditions suivantes est vérifiée:

   (a) Il existe 100 filles $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ telles que A_1 est amie avec A_2, A_2 est amie avec A_3, ..., A_{99} est amie avec A_{100};

   (b) Il existe 7 filles $B_1, \ldots, B_7$ telles que B_1 est ennemie avec B_2, B_3 est ennemie avec B_4, et B_6est ennemie avec B_5 et B_7.

   Quel est le nombre maximal d'élèves pour que l'école puisse ne pas être performante?

Olympiade internationale de mathématiques
“Formule d’Unité”/ “Troisième millénaire

Année 2016/2017. Tour 1

Sujet pour le niveau R9

N’oubliez pas de justifier toutes vos réponses!

1. Un fragment de 96 feuilles (consécutives) est tombé d’un livre. Est-il possible que la somme des numéros de toutes les pages (il y a deux pages sur une feuille) soit 20170?

2. Tous les sommets d’un polygone à 789 côtés sont coloriés en rouge. À l’intérieur de ce polygone se trouvent encore 615 points rouges. Parmi tous les points rouges (sommets et les points à l’intérieur du polygone) il n’existe pas trois points alignés. On a partagé le polygone en des triangles. Tous les sommets de ces triangles sont rouges et tous les points rouges ont été utilisés. Combien de triangles a-t-on obtenu?

3. Soit a, b, c, d, e, f cinq nombres strictement positifs. Quelles valeurs peut prendre l’expression suivante:
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)} + \frac{cd}{(b+c)(d+e)} + \frac{ef}{(d+e)(f+a)}?$$

4. Soit un parallélogramme $ABCD$ et E le point d’intersection de ses diagonales. Soit F le point d’intersection des bissectrices des angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{EBC}$. Si $ECFD$ est un parallélogramme, quelle est alors la mesure de l’angle $\widehat{AFB}$?

5. Les diagonales des faces d’une boîte mesurent 4, 6 et 7 décimètres. Peut-on placer une balle de diamètre 2 décimètres dans cette boîte?

6. Alex a décidé d’acheter trois jeux de timbres rares: un pour lui-même et deux pour ses amis. Chaque jeu est composé de trois timbres A,B et C. Il a trouve trois sites qui en vendent sur Internet. Le premier vend les timbres A et B à 200 euros pour les deux timbres, le deuxième vend les timbres B et C à 300 euros pour les deux timbres, et le troisième vend les timbres B et C à x euros pour les deux timbres. Il a calculé la somme totale d’argent nécessaire pour l’achat. Mais ensuite il a décidé qu’il aimerait bien visiter seulement deux sites parmi ces trois. Mais pour le faire, il lui faudra au minimum encore 120 euros. Quel pouvait être le tarif x du troisième site?

7. Représenter le polynôme $33x^4 + 578$ comme une somme du plus petit nombre possible de carrés de polynômes à coefficients entiers.

Olympiade internationale de mathématiques
“Formule d’Unité”/ “Troisième millénaire

Année 2016/2017. Tour 1

Sujet pour le niveau R10

N’oubliez pas de justifier toutes vos réponses!

1. Tous les sommets d’un polygone à 789 côtés sont coloriés en rouge. À l’intérieur de ce polygone se trouvent encore 615 points rouges. Parmi tous les points rouges (sommets et les points à l’intérieur du polygone) il n’existe pas trois points alignés. On a partagé le polygone en des triangles. Tous les sommets de ces triangles sont rouges et tous les points rouges ont été utilisés. Combien de triangles a-t-on obtenu?

2. Quelle est la valeur maximale du PGCD des nombres $n^2 + 3$ et $(n + 1)^2 + 3$, où n est un entier naturel?

3. Les diagonales des faces d’une boîte mesurent 4, 6 et 7 décimètres. Peut-on placer une balle de diamètre 2 décimètres dans cette boîte?

4. Les points X et Y sont placés sur les côtés AB et BC du triangle ABC de sorte que $AX = BY$. De plus, les points A, X, Y et C sont cocycliques. On note B_1 le pied de la bissectrice de l’angle $\widehat{B}$. Montrer que les droites (XB_1) et (YC) sont parallèles.

5. Alex a décidé d’acheter trois jeux de timbres rares: un pour lui-même et deux pour ses amis. Chaque jeu est composé de trois timbres A,B et C. Il a trouve trois sites qui en vendent sur Internet. Le premier vend les timbres A et B à 200 euros pour les deux timbres, le deuxième vend les timbres B et C à 300 euros pour les deux timbres, et le troisième vend les timbres B et C à x euros pour les deux timbres. Il a calculé la somme totale d’argent nécessaire pour l’achat. Mais ensuite il a décidé qu’il aimerait bien visiter seulement deux sites parmi ces trois. Mais pour le faire, il lui faudra au minimum encore 120 euros. Quel pouvait être le tarif x du troisième site?

6. Représenter le polynôme $6x^4+5$ comme une somme du plus petit nombre possible de carrés de polynômes à coefficients entiers.

7. Les organisateurs d’une olympiade votent pour décider lequel de deux problèmes (A ou B) retenir pour un sujet. Le vote se passe ainsi: chaque organisateur, à tour des rôle et dans l’ordre alphabétique, dit lequel des deux problèmes lui plaît le plus. À la fin du vote, le problème A a été retenu avec 11 voix pour et 5 voix contre. De plus, à tout moment il y avait au moins deux fois plus de votes pour A que pour B. De combien de façons différentes pouvait se dérouler le vote?

Olympiade internationale de mathématiques
“Formule d’Unité”/ “Troisième millénaire

Année 2016/2017. Tour 1

Sujet pour le niveau R11

N’oubliez pas de justifier toutes vos réponses!

1. Combien de solutions n (n est un entier naturelle) l’inéquation
$$\sin\frac{10\pi}{n} > \cos\frac{10\pi}{n}$$
admet-elle?

2. Quelle est la valeur maximale du PGCD des nombres n^2+3 et $(n+1)^2+3$, où n est un entier naturel?

3. On appelle **nombres sympathiques** les nombres de la forme 2^x+3^y, où x et y sont des entiers naturels. Il est facile de voir que les nombres $5 = 2^1+3^1 = 2^2+3^0$ et $11 = 2^3+3^1 = 2^1+3^2$ sont doublement sympathiques (c.à.d. ils peuvent être représentés sous cette forme de deux façons différentes). Combien de nombres doublement sympathiques existe-t-il en tout?

4. Les points X et Y sont placés sur les côtés AB et BC du triangle ABC de sorte que $AX = BY$. De plus, les points A, X, Y et C sont cocycliques. On note B_1 le pied de la bissectrice de l’angle $\widehat{B}$. Montrer que les droites (XB_1) et (YC) sont parallèles.

5. Le père veut expédier 13 balles identiques à son fils. Pour cela il a acheté une boîte, dont les diagonales des faces mesurent 4, 6 et 7 décimètres. On sait qu’une balle peut être placée dans cette boîte. Est-il vrai qu’on peut y placer toutes les 13 balles?

6. Les organisateurs d’une olympiade votent pour décider lequel de deux problèmes (A ou B) retenir pour un sujet. Le vote se passe ainsi: chaque organisateur, à tour des rôle et dans l’ordre alphabétique, dit lequel des deux problèmes lui plaît le plus. À la fin du vote, le problème A a été retenu avec 11 voix pour et 5 voix contre. De plus, à tout moment il y avait au moins deux fois plus de votes pour A que pour B. De combien de façons différentes pouvait se dérouler le vote?

7. Est-il possible qu’un polynôme cubique $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, $(a \neq 0)$ à coefficients entiers prenne les valeurs 1, 2, 3 et 4 pour certains valeurs entières de n?