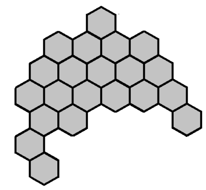
Internacia matematika olimpiko
«Formulo de Integreco» / «La tria jarmilo»
Lernojaro 2016/2017, La unua etapo

Taskoj por la klasjaro R5

Bv. ne forgesi motivi la respondojn.

1. Montru, kiel eblas distranĉi ĉi tiun figuron je tri egalaj pecoj.

   (La pecoj nomiĝas egalaj, se eblas kuŝigi ilin unu sur alian tiel, ke ili kongruu.)

2. Unu natura nombro pli grandas ol la alia je 1. Ĉu povas ilia produto finiĝi per 2017?

3. Sur tablo kuŝas objektoj kun masoj 180, 181, 182, …, 200 gramoj (po unu objekto de ĉiu maso). Ĉu eblas elekti kelkajn el ili tiel, ke ilia komuna maso estu egala al 1 kilogramo?

4. Sur tabulo estas skribitaj 20 nuloj kaj 17 unuoj. Je unu fojo eblas forviŝi du ajnajn nombrojn kaj anstataŭe skribi ilian sumon. La *fojo* nomiĝas *grava*, se ĝia rezultita nombro estas pli granda, ol ĉiu el la forviŝitaj. Kiom da gravaj fojoj estos realigitaj antaŭ ol restos unu sola nombro sur la tabulo?

5. En sako kuŝas kelkaj karamelbombonoj kun diversaj gustoj, kaj produktitaj en diversaj landoj. Du ajnaj bombonoj en la sako diferencas aŭ per la gusto, aŭ per la devenlando, aŭ per ambaŭ kriterioj. Se du bombonoj en la sako diferencas samtempe laŭ la gusto kaj laŭ la lando, do en la sako troviĝas ekzakte unu bombono, kiu diferencas de unu el ili nur guste, kaj de la alia nur lande. Estas konate, ke en la sako troviĝas precize 5 bombonoj kun gusto de pomo kaj precize 7 bombonoj el Gondolando. Kiom da karamelbombonoj povas esti en la sako? Trovu ĉiujn variantojn de la respondo.

6. Laŭlonge de la vojo staras kolonetoj, numeritaj laŭ la ordo: 0, 1, 2, 3 ktp. Ĉe la koloneto 0 staras rajdisto kun dresita ĉevalo. Kiam la rajdisto diras iun naturan nombron, la ĉevalo saltas antaŭen al la plej proksima koloneto, kies numeron eblas dividi per tiu nombro. La rajdisto diris nombrojn de 1 ĝis 10 po unu fojo en ia ordo. Kiu estas la maksimume ebla numero de la koloneto, apud kiu povus troviĝi la ĉevalo post tio? Pruvu, ke tiu numero vere estas la maksimuma. (Ekzemple, se la rajdisto diras la nombrojn en la ordo 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, do la vojo de la ĉevalo estas la sekva: 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, 41.)

7. Knabino Liza volas farbi sur kradtabulo 6×6 du neintersekciĝantajn kvadratojn de diversaj grandoj tiel, ke iliaj konturoj troviĝu sur la linioj de la krado. Kiom da manieroj tion fari ŝi povas realigi? La manieroj, rezultitaj per turnado de la tabulo, konsideritas diversaj.

Internacia matematika olimpiko
«Formulo de Integreco» / «La tria jarmilo»

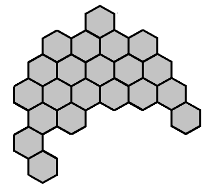
Lernojaro 2016/2017, La unua etapo

Taskoj por la klasjaro R6

Bv. ne forgesi motivi la respondojn.

1. Montru, kiel eblas distranĉi ĉi tiun figuron je tri egalaj pecoj.

   (La pecoj nomiĝas egalaj, se eblas kuŝigi ilin unu sur alian tiel, ke ili kongruu.)

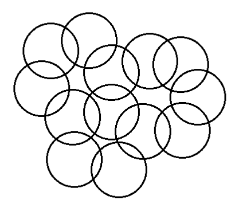


2. Unu natura nombro pli grandas ol la alia je 2. Ĉu povas ilia produto finiĝi per 2017?

3. Aleksio decidis aĉeti du kompletojn de raraj poŝtmarkoj (por si kaj por la amiko). Unu kompleto konsistas el tri markoj A, B kaj C. En Interreto li trovis tri magazenojn, sed ĉiu el ili vendas la markojn pare. La unua magazeno vendas kompleton «poŝtmarko A + poŝtmarko B» kontraŭ 200 rubloj, la dua vendas kompleton «poŝtmarko B + poŝtmarko C» kontraŭ 300 rubloj, kaj en la tria magazeno aĉeteblas kompleto «poŝtmarko C + poŝtmarko A» kontraŭ x rubloj. Aleksio kalkulis minimuman monsumon, bezonatan por la aĉeto. Tamen poste li ekpensis, ke li preferus viziti nur iujn du magazenojn el tiuj tri. Pro tiu ĉi kondiĉo, la minimume bezonata monsumo pligrandiĝis je 120 rubloj. Al kio povus egali la x?

4. Sur ebeno troviĝas rondoj, kiel montritas sur la bildo.

   Ene de ĉiu rondo estas metitaj tri punktoj, sed sur la cirkloj (t.e. sur la limoj de la rondoj) la punktoj forestas. Trovu minimume eblan suman kvanton de la punktoj.



5. En sako kuŝas kelkaj karamelbombonoj kun diversaj gustoj, kaj produktitaj en diversaj landoj. Du ajnaj bombonoj en la sako diferencas aŭ per la gusto, aŭ per la devenlando, aŭ per ambaŭ kriterioj. Se du bombonoj en la sako diferencas samtempe laŭ la gusto kaj laŭ la lando, do en la sako troviĝas ekzakte unu bombono, kiu diferencas de unu el ili nur guste, kaj de la alia nur lande. Estas konate, ke en la sako troviĝas precize 5 bombonoj kun gusto de pomo kaj precize 7 bombonoj el Gondolando. Kiom da karamelbombonoj povas esti en la sako? Trovu ĉiujn variantojn de la respondo.

6. Laŭlonge de la vojo staras kolonetoj, numeritaj laŭ la ordo: 0, 1, 2, 3 ktp. Ĉe la koloneto 0 staras rajdisto kun dresita ĉevalo. Kiam la rajdisto diras iun naturan nombron, la ĉevalo saltas antaŭen al la plej proksima koloneto, kies numeron eblas dividi per tiu nombro. La rajdisto diris nombrojn de 1 ĝis 10 po unu fojo en ia ordo. Kiu estas la maksimume ebla numero de la koloneto, apud kiu povus troviĝi la ĉevalo post tio? Pruvu, ke tiu numero vere estas la maksimuma. (Ekzemple, se la rajdisto diras la nombrojn en la ordo 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, do la vojo de la ĉevalo estas la sekva: 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, 41.)

7. Knabino Liza volas farbi sur kradtabulo 6×6 tri neintersekciĝantajn kvadratojn tiel, ke ili ĉiuj havu diversajn grandojn, kaj iliaj konturoj troviĝu sur la linioj de la krado. Kiom da manieroj tion fari ŝi povas realigi? La manieroj, rezultitaj per turnado de la tabulo, konsideritas diversaj.

Internacia matematika olimpiko
«Formulo de Integreco» / «La tria jarmilo»

Lernojaro 2016/2017, La unua etapo

Taskoj por la klasjaro R7

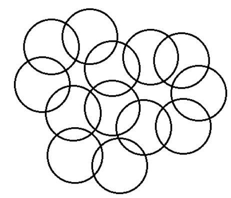
Bv. ne forgesi motivi la respondojn.

1. Ĉu povas la sumo de 44 naturaj nombroj esti 4-oble pli granda ol ilia produto?

2. Unu natura nombro pli grandas ol la alia je 1. Ĉu povas ilia produto finiĝi per 2016?

3. Ĉu eblas desegni tri triangulojn tiel, ke ilia intersekco kaj kunigaĵo estu konveksaj kvaranguloj? Kvarangulo nomiĝas konveksa, se ambaŭ ĝiaj diagonaloj troviĝas ene de ĝi.

4. Sur ebeno troviĝas rondoj, kiel montritas sur la bildo.



Ene de ĉiu rondo estas metitaj tri punktoj, sed sur la cirkloj (t.e. sur la limoj de la rondoj) la punktoj forestas. Trovu minimume eblan suman kvanton de la punktoj.

5. Sur tablo kuŝas objektoj kun masoj 150, 151, 152, ..., 200 gramoj (po unu objekto de ĉiu maso). Peĉjo povas elekti unu aŭ kelkajn objektojn kaj pesi ilin. Kiom da diversaj masoj li povas ricevi tiel?

6. Knabino Liza volas farbi sur kradtabulo 6×6 tri neintersekciĝantajn kvadratojn tiel, ke ili ĉiuj havu diversajn grandojn, kaj iliaj konturoj troviĝu sur la linioj de la krado. Kiom da manieroj tion fari ŝi povas realigi? La manieroj, rezultitaj per turnado de la tabulo, konsideritas diversaj.

7. En lernejo por knabinoj, du ajnaj lernantinoj aŭ amikas aŭ malamikas inter si. Lernejo nomiĝas *sukcesa*, se plenumiĝas unu el sekvaj kondiĉoj:

   (a) ekzistas 100 knabinoj $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ tiaj, ke A_1 amikas kun A_2, A_2 amikas kun A_3, ..., A_{99} amikas kun A_{100};

   (b) ekzistas 7 knabinoj $B_1, \ldots, B_7$ tiaj, ke B_1 malamikas kun B_2, B_3 malamikas kun B_4, sed B_6 malamikas kun B_5 kaj B_7.

   Trovu maksimuman kvanton da lernantinoj, kun kiu la lernejo povas ne estiĝi sukcesa.

Internacia matematika olimpiko
«Formulo de Integreco» / «La tria jarmilo»

Lernojaro 2016/2017, La unua etapo

Taskoj por la klasjaro R8

Bv. ne forgesi motivi la respondojn.

1. Ĉu povas la sumo de 44 naturaj nombroj esti 4-oble pli granda ol ilia produto?

2. El libro elfalis fragmento, konsistanta el 96 folioj (ĉiu folio estas paro da paĝoj). Ĉu povas la sumo de la numeroj de ĉiuj ĉi paĝoj esti egala al 20170?

3. Estu a, b, c, d, e, f pozitivaj nombroj. Kiujn signifojn povas akcepti la esprimo

$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)} + \frac{cd}{(b+c)(d+e)} + \frac{ef}{(d+e)(f+a)}.$$

4. La diagonaloj de paralelogramo $ABCD$ interkruciĝas en punkto E. La bisekcantoj de la anguloj DAE kaj EBC interkruciĝas en punkto F. Trovu la grandon de la angulo AFB, se $ECFD$ estas paralelogramo.

5. Sur tablo kuŝas objektoj kun masoj 150, 151, 152, ..., 200 gramoj (po unu objekto de ĉiu maso). Peĉjo povas elekti unu aŭ kelkajn objektojn kaj pesi ilin. Kiom da diversaj masoj li povas ricevi tiel?

6. Tri trianguloj situas tiel, ke iliaj intersekco kaj kunigaĵo estas kvaranguloj. Ĉu povas tiuj du kvaranguloj havi entute 6 ortajn angulojn?

7. En lernejo por knabinoj, du ajnaj lernantinoj aŭ amikas aŭ malamikas inter si. Lernejo nomiĝas *sukcesa*, se plenumiĝas unu el sekvaj kondiĉoj:

   (a) ekzistas 100 knabinoj $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ tiaj, ke A_1 amikas kun A_2, A_2 amikas kun A_3, ..., A_{99} amikas kun A_{100};

   (b) ekzistas 7 knabinoj $B_1, \ldots, B_7$ tiaj, ke B_1 malamikas kun B_2, B_3 malamikas kun B_4, sed B_6 malamikas kun B_5 kaj B_7.

   Trovu maksimuman kvanton da lernantinoj, kun kiu la lernejo povas ne estiĝi sukcesa.

Internacia matematika olimpiko
«Formulo de Integreco» / «La tria jarmilo»

Lernojaro 2016/2017, La unua etapo

Taskoj por la klasjaro R9

Bv. ne forgesi motivi la respondojn.

1. El libro elfalis fragmento, konsistanta el 96 folioj (ĉiu folio estas paro da paĝoj). Ĉu povas la sumo de la numeroj de ĉiuj ĉi paĝoj esti egala al 20170?

2. Ĉiuj verticoj de la 789-agngulo estas markitaj per ruĝo, kaj ene de ĝi troviĝas ankoraŭ 615 ruĝaj punktoj. Neniuj tri ruĝaj punktoj troviĝas sur unu rekta linio. La multangulo estas sekcita je trianguloj, kies verticoj estas la ĉiuj ruĝaj punktoj, kaj nur ili. Kiom da tiuj trianguloj ekzistas?

3. Estu a, b, c, d, e, f pozitivaj nombroj. Kiujn signifojn povas akcepti la esprimo
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)}+\frac{cd}{(b+c)(d+e)}+\frac{ef}{(d+e)(f+a)}.$$

4. La diagonaloj de paralelogramo $ABCD$ interkruciĝas en punkto E. La bisekcantoj de la anguloj DAE kaj EBC interkruciĝas en punkto F. Trovu la grandon de la angulo AFB, se $ECFD$ estas paralelogramo.

5. La diagonaloj de la edroj de poŝtkesto egalas 4, 6 kaj 7 decimetrojn. Ĉu povas enmetiĝi pilko kun diametro je 2 decimetroj en tian keston?

6. Aleksio decidis aĉeti tri kompletojn de raraj poŝtmarkoj (por si kaj por du amikoj). Unu kompleto konsistas el tri markoj A, B kaj C. En Interreto li trovis tri magazenojn, sed ĉiu el ili vendas la markojn pare. La unua magazeno vendas kompleton «poŝtmarko A + poŝtmarko B» kontraŭ 200 rubloj, la dua vendas kompleton «poŝtmarko B + poŝtmarko C» kontraŭ 300 rubloj, kaj en la tria magazeno aĉeteblas kompleto «poŝtmarko C + poŝtmarko A» kontraŭ x rubloj. Aleksio kalkulis minimuman monsumon, bezonatan por la aĉeto. Tamen poste li ekpensis, ke li preferus viziti nur iujn du magazenojn el tiuj tri. Pro tiu ĉi kondiĉo, la minimume bezonata monsumo pligrandiĝis je 120 rubloj. Al kio povus egali la x?

7. Prezentu la binomon $33x^4+578$ kiel sumon de kvadratoj de kiel eble plej malgranda kvanto de polinomoj kun entjeraj koeficientoj.

Internacia matematika olimpiko
«Formulo de Integreco» / «La tria jarmilo»

Lernojaro 2016/2017, La unua etapo

Taskoj por la klasjaro R10

Bv. ne forgesi motivi la respondojn.

1. Ĉiuj verticoj de la 789-agngulo estas markitaj per ruĝo, kaj ene de ĝi troviĝas ankoraŭ 615 ruĝaj punktoj. Neniuj tri ruĝaj punktoj troviĝas sur unu rekta linio. La multangulo estas sekcita je trianguloj, kies verticoj estas la ĉiuj ruĝaj punktoj, kaj nur ili. Kiom da tiuj trianguloj ekzistas?

2. Kiun maksimuman signifon povas havi la plej granda komuna divizoro de nombroj $n^2 + 3$ kaj $(n + 1)^2 + 3$, kie n estas natura nombro?

3. La diagonaloj de la edroj de poŝtkesto egalas 4, 6 kaj 7 decimetrojn. Ĉu povas enmetiĝi pilko kun diametro je 2 decimetroj en tian keston?

4. Sur la lateroj AB kaj BC de triangulo ABC, estas elektitaj punktoj X kaj Y tiel, ke $AX = BY$. Krome, la punktoj A, X, Y kaj C troviĝas sur unu cirklo. B_1 estas la bazo de l' bisekcanto de l' angulo B. Pruvu, ke la rektlinioj XB_1 kaj YC paralelas.

5. Aleksio decidis aĉeti tri kompletojn de raraj poŝtmarkoj (por si kaj por du amikoj). Unu kompleto konsistas el tri markoj A, B kaj C. En Interreto li trovis tri magazenojn, sed ĉiu el ili vendas la markojn pare. La unua magazeno vendas kompleton «poŝtmarko A + poŝtmarko B» kontraŭ 200 rubloj, la dua vendas kompleton «poŝtmarko B + poŝtmarko C» kontraŭ 300 rubloj, kaj en la tria magazeno aĉeteblas kompleto «poŝtmarko C + poŝtmarko A» kontraŭ x rubloj. Aleksio kalkulis minimuman monsumon, bezonatan por la aĉeto. Tamen poste li ekpensis, ke li preferus viziti nur iujn du magazenojn el tiuj tri. Pro tiu ĉi kondiĉo, la minimume bezonata monsumo pligrandiĝis je 120 rubloj. Al kio povus egali la x?

6. Prezentu la binomon $6x^4 + 5$ kiel sumon de kvadratoj de kiel eble plej granda kvanto de polinomoj kun entjeraj koeficientoj.

7. Kompilantoj de olimpiko voĉdone decidas, kiun el taskoj (A aŭ B) meti en varianton de taskaro. Por tio, ĉiuj kompilantoj laŭvice (en la alfabeta ordo) anoncas, kiu el la taskoj pli plaĉas al ili. Rezulte de la voĉdonado evidentiĝis, ke tasko A «venkis» kun poentoj 11:5; kaj krome, en ĉiu momento ĝi havis almenaŭ duoble pli multe da voĉoj, ol tasko B. Kiom da manieroj (variaĵoj) de la voĉdonado povus ekzisti?

Internacia matematika olimpiko
«Formulo de Integreco» / «La tria jarmilo»
Lernojaro 2016/2017, La unua etapo

Taskoj por la klasjaro R11

Bv. ne forgesi motivi la respondojn.

1. Kun kiom da naturaj n plenumiĝas la neekvacio
$$\sin \frac{10\pi}{n} > \cos \frac{10\pi}{n}?$$

2. Kiun maksimuman signifon povas havi la plej granda komuna divizoro de nombroj $n^2 + 3$ kaj $(n+1)^2 + 3$, kie n estas natura nombro?

3. Ni diru, ke nombro nomiĝas *merita*, se ĝi havas aspekton $2^x + 3^y$, kie x kaj y estas naturaj nombroj aŭ 0. Facilas vidi, ke nombroj $5 = 2^1 + 3^1 = 2^2 + 3^0$ kaj $11 = 2^3 + 3^1 = 2^1 + 3^2$ estas duoble meritaj (t.e. reprezenteblaj ĉi-aspekte per du manieroj). Respondu, kiom da duoble meritaj nombroj ekzistas entute?

4. Sur la lateroj AB kaj BC de triangulo ABC, estas elektitaj punktoj X kaj Y tiel, ke $AX = BY$. Krome, la punktoj A, X, Y kaj C troviĝas sur unu cirklo. B_1 estas la bazo de l' bisekcanto de l' angulo B. Pruvu, ke la rektlinioj XB_1 kaj YC paralelas.

5. Patro volas sendi al la filo 13 identajn pilketojn. Por tio li aĉetis poŝtkeston kun diagonaloj de la edroj 4, 6 kaj 7 decimetroj. Evidentiĝis, ke unu pilkon eblas enmeti en ĉi tiun keston. Ĉu veras, ke en ĝin eblas enmeti ĉiujn 13 pilkojn?

6. Kompilantoj de olimpiko voĉdone decidas, kiun el taskoj (A aŭ B) meti en varianton de taskaro. Por tio, ĉiuj kompilantoj laŭvice (en la alfabeta ordo) anoncas, kiu el la taskoj pli plaĉas al ili. Rezulte de la voĉdonado evidentiĝis, ke tasko A «venkis» kun poentoj 11:5; kaj krome, en ĉiu momento ĝi havis almenaŭ duoble pli multe da voĉoj, ol tasko B. Kiom da manieroj (variaĵoj) de la voĉdonado povus ekzisti?

7. Ĉu povas kuba polinomo (t.e. polinomo kiel $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$) kun entjeraj koeficientoj havi signifojn 1, 2, 3, 4 kun entjeraj signifoj de x?