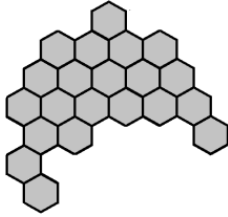


אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה
"פורמולו דה אינגרצו" \ "המילניום השלישי"
שנת 2016/2017. שלב ראשון

בעיות לכיתה ו'

אנא מכם, אל תשכחו לבסס את תשובותיכם.

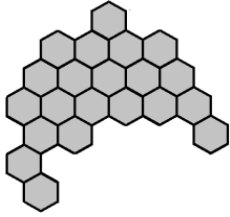


1. הראו כיצד לחתוך את הצורה הנתונה לשלושה חלקים חופפים. (חלקים נקראים חופפים אם אפשר לשים אותם אחד על השני כך שהם יתלכדו.)
2. נתונים שני מספרים שלמים חיוביים עוקבים. האם המכפלה שלהם יכולה להסתיים בספרות 2017?
3. על השולחן מונחות משקולות במשקלים של 200, 182, 181, 180 גרם (אחת מכל סוג). האם ניתן לבחור חלק מהמשקולות כך שהמשקל הכולל שלהן יהיה קילוגרם 1 בדיוק?
4. על הלוח רשומים 20 אפסים ו-17 אחדים. בכל מהלך מותר למחוק שני מספרים כלשהם ולכתוב במקומם את סכומם. מהלך נקרא חשוב אם המספר שנכתב בסופו גדול מכל אחד מהמספרים שנמחקו. כמה מהלכים חשובים ייעשו עד שיישאר על הלוח מספר בודד?
5. יש מספר סוכריות בשקית בטעמים שונים ועם ארצות ייצור שונות. כל שתי סוכריות נבדלות בטעם, בארץ הייצור או בשניהם. אם שתי סוכריות נבדלות גם בטעם וגם בארץ הייצור, אז תימצא בדיוק סוכרייה אחת שנבדלת מאחת מהן רק בטעם, ונבדלת מהשנייה רק בארץ הייצור. ידוע שיש בשקית בדיוק 5 סוכריות בטעם תפוח ובדיוק 7 סוכריות שיוצרו ברוסיה. כמה סוכריות בסך-הכל יכולות להיות בשקית? מצאו את כל האפשרויות.
6. לאורך הכביש יש עמודים הממוספרים לפי הסדר: 0, 1, 2, 3 וכו'. ליד עמוד מספר 0 עומד רוכב על סוס מאולף. כשהרוכב אומר מספר שלם וחיובי, הסוס קופץ קדימה לעמוד הכי קרוב שמספרו מתחלק במספר זה. הרוכב אמר את המספרים מ-1 עד 10 בסדר כלשהו. מהו המספר הכי גדול של העמוד שאליו יכול היה הסוס להגיע? הוכיחו שזהו אכן המספר המקסימלי. (דוגמה: אם הרוכב אומר את המספרים בסדר הפוך 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 אז המסלול של הסוס הוא: 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, 41.)
7. ליזה רוצה לצבוע בלוח משבצות 6×6 שני ריבועים בגדלים שונים שמורכבים ממשבצות הלוח ושאינם נחתכים. בכמה דרכים שונות היא יכולה לעשות את זה? דרכים שמתקבלות זו מזו על-ידי סיבוב של הלוח נחשבות שונות.

אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה
"פורמולו דה אינגרצו" \ "המילניום השלישי"
שנת 2016/2017. שלב ראשון

בעיות לכיתה ז'

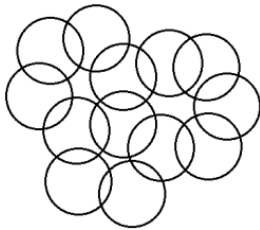
אנא מכם, אל תשכחו לבסס את תשובותיכם.



1. הראו כיצד לחתוך את הצורה הנתונה לשלושה חלקים חופפים. (חלקים נקראים חופפים אם אפשר לשים אותם אחד על השני כך שהם יתלכדו.)

2. נתונים שני מספרים שלמים חיוביים שאחד מהם גדול ב-2 מהשני. האם המכפלה שלהם יכולה להסתיים בספרות 2017?

3. אלכסיי החליט לקנות שתי חבילות של בולים נדירים (בשבילו ובשביל חבר). כל חבילה מורכבת מהבולים א, ב ו-ג. הוא מצא באינטרנט שלוש חנויות, אבל כל חנות מכרה בולים בזוגות בלבד. החנות הראשונה מכרה את הזוג "בול א + בול ב" ב-200 לירות, החנות השנייה מכרה את הזוג "בול ב + בול ג" ב-300 לירות ובחנות השלישית הזוג "בול ג + בול א" עלה x לירות. אלכסיי חישב את הכמות המינימלית של כסף שדרוש בשביל הקנייה. אולם לאחר מכן הוא החליט שהוא רוצה לבקר רק בשתי חנויות, ובעקבות כך כמות הכסף המינימלית הנדרשת עלתה ב-120 לירות. מה יכול להיות ערכו של x ?



4. מספר עיגולים ממוקמים במישור, כפי שמתואר בציור. סימנו מספר נקודות כך שבתוך כל עיגול יש 3 נקודות מסומנות ואין אף נקודה מסומנת על השפה. מהו המספר המינימלי האפשרי של נקודות מסומנות?

5. יש מספר סוכריות בשקית בטעמים שונים ועם ארצות ייצור שונות. כל שתי סוכריות נבדלות בטעם, בארץ הייצור או בשניהם. אם שתי סוכריות נבדלות גם בטעם וגם בארץ הייצור, אז תימצא בדיוק סוכרייה אחת שנבדלת מאחת מהן רק בטעם, ונבדלת מהשנייה רק בארץ הייצור. ידוע שיש בשקית בדיוק 5 סוכריות בטעם תפוח ובדיוק 7 סוכריות שיוצרו ברוסיה. כמה סוכריות בסך-הכל יכולות להיות בשקית? מצאו את כל האפשרויות.

6. לאורך הכביש יש עמודים הממוספרים לפי הסדר: 0, 1, 2, 3 וכו'. ליד עמוד מספר 0 עומד רוכב על סוס מאולף. כשהרוכב אומר מספר שלם וחיובי, הסוס קופץ קדימה לעמוד הכי קרוב שמספרו מתחלק במספר זה. הרוכב אמר את המספרים מ-1 עד 10 בסדר כלשהו. מהו המספר הכי גדול של העמוד שאליו יכול היה הסוס להגיע? הוכיחו שזהו אכן המספר המקסימלי. (דוגמה: אם הרוכב אומר את המספרים בסדר הפוך 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 אז המסלול של הסוס הוא: 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, 41.)

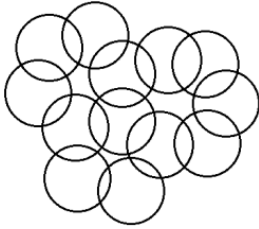
7. ליזה רוצה לצבוע בלוח משבצות 6×6 שלושה ריבועים בגדלים שונים שמורכבים ממשבצות הלוח ושאינם נחתכים. בכמה דרכים שונות היא יכולה לעשות את זה? דרכים שמתקבלות זו מזו על-ידי סיבוב של הלוח נחשבות שונות.

אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה
"פורמולו דה אינגרצו" \ "המילניום השלישי"
שנת 2016/2017. שלב ראשון

בעיות לכיתה ח'

אנא מכם, אל תשכחו לבסס את תשובותיכם.

1. האם סכום של 44 מספרים שלמים חיוביים יכול להיות פי 4 יותר גדול ממכפלתם?
2. נתונים שני מספרים שלמים חיוביים עוקבים. האם המכפלה שלהם יכולה להסתיים בספרות 2016?
3. האם ניתן לצייר שלושה משולשים כך שהחיתוך שלהם והאיחוד שלהם הם מרובעים קמורים? מרובע נחשב לקמור אם שני אלכסוניו מוכלים בתוכו.
4. מספר עיגולים ממוקמים במישור, כפי שמתואר בציור. סימנו מספר נקודות כך שבתוך כל עיגול יש 3 נקודות מסומנות ואין אף נקודה מסומנת על השפה. מהו המספר המינימלי האפשרי של נקודות מסומנות?
5. על השולחן מונחות משקולות במשקלים של 200, ..., 152, 151, 150 גרם (אחת מכל סוג). פיטר יכול לבחור משקולת אחת או יותר ולשקול אותן. כמה משקלים שונים הוא יכול לקבל בצורה כזו?
6. ליזה רוצה לצבוע בלוח משבצות 6×6 שלושה ריבועים בגדלים שונים שמורכבים ממשבצות הלוח ושאינם נחתכים. בכמה דרכים שונות היא יכולה לעשות את זה? דרכים שמתקבלות זו מזו על-ידי סיבוב של הלוח נחשבות שונות.
7. בבית-ספר בנות כל שתי תלמידות הן או חברות או אויבות. בית-ספר נחשב למוצלח אם מתקיים אחד מבין התנאים הבאים:
(1) קיימות 100 בנות A_1, A_2, \dots, A_{100} כך ש- A_1 חברה של A_2, A_2 חברה של A_3, \dots, A_{99} חברה של A_{100} ;
(2) קיימות 7 בנות B_1, B_2, \dots, B_7 כך ש- B_1 אויבת של B_2, B_3 אויבת של B_4, B_5 אויבת של B_6 ושל B_7 .
מצאו את הכמות המקסימלית של תלמידות שיכולות ללמוד בבית-ספר שאינו מוצלח.



אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה
"פורמולו דה אינגרצו" \ "המילניום השלישי"
שנת 2016/2017. שלב ראשון

בעיות לכיתה ט'

אנא מכם, אל תשכחו לבסס את תשובותיכם.

1. האם סכום של 44 מספרים שלמים חיוביים יכול להיות פי 4 יותר גדול ממכפלתם?
2. מתוך ספר נפל קטע באורך של 96 דפים (כל דף מורכב מזוג עמודים). האם סכום המספרים של כל העמודים יכול להיות שווה ל-20170?
3. יהיו a, b, c, d, e, f מספרים חיוביים. אילו ערכים יכול לקבל הביטוי
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)} + \frac{cd}{(b+c)(d+e)} + \frac{ef}{(d+e)(f+a)}$$
?
4. אלכסוני המקבילית $ABCD$ נחתכים בנקודה E . חוצי-הזוויות של $\sphericalangle DAE$ ו- $\sphericalangle EBC$ נחתכים בנקודה F . מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle AFB$ בהינתן ש- $ECFD$ מקבילית.
5. על השולחן מונחות משקולות במשקלים של 200, ..., 152, 151, 150 גרם (אחת מכל סוג). פיטר יכול לבחור משקולת אחת או יותר ולשקול אותן. כמה משקלים שונים הוא יכול לקבל בצורה כזו?
6. שלושה משולשים ממוקמים במישור כך שהחיתוך שלהם והאיחוד שלהם הם מרובעים. האם לשני המרובעים הללו ביחד יכולות להיות 6 זוויות ישרות?
7. בבית-ספר בנות כל שתי תלמידות הן או חברות או אויבות. בית-ספר נחשב למוצלח אם מתקיים אחד מבין התנאים הבאים:
(1) קיימות 100 בנות A_1, A_2, \dots, A_{100} כך ש- A_1 חברה של A_2, A_3, \dots, A_{99} חברה של A_{100} ;
(2) קיימות 7 בנות B_1, B_2, \dots, B_7 כך ש- B_1 אויבת של B_2, B_3, B_4 אויבת של B_5, B_6, B_7 וש- B_5 ושל B_7 .
מצאו את הכמות המקסימלית של תלמידות שיכולות ללמוד בבית-ספר שאינו מוצלח.

אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה
"פורמולו דה אינגרצו" \ "המילניום השלישי"
שנת 2016/2017. שלב ראשון

בעיות לכיתה י'

אנא מכם, אל תשכחו לבסס את תשובותיכם.

- מתוך ספר נפל קטע באורך של 96 דפים (כל דף מורכב מזוג עמודים). האם סכום המספרים של כל העמודים יכול להיות שווה ל-20170?
- כל הקודקודים של מצולע בעל 789 צלעות נצבעו באדום. כמו כן, סומנו 615 נקודות אדומות בתוך המצולע. אף שלוש נקודות אדומות לא נמצאות על ישר אחד. המצולע חולק למשולשים שקודקודיהם הם כל הנקודות האדומות ורק הן. כמה משולשים יש?
- יהיו a, b, c, d, e, f מספרים חיוביים. אילו ערכים יכול לקבל הביטוי
$$? \frac{ab}{(f+a)(b+c)} + \frac{cd}{(b+c)(d+e)} + \frac{ef}{(d+e)(f+a)}$$
- אלכסוני המקבילית $ABCD$ נחתכים בנקודה E . חוצי-הזוויות של $\sphericalangle DAE$ ו- $\sphericalangle EBC$ נחתכים בנקודה F . מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle AFB$ בהינתן ש- $ECFD$ מקבילית.
- אורכי האלכסונים של הפאות של תיבת דואר הם 4, 6 ו-7. האם ניתן להכניס לתוך התיבה כדור מקוטר 2?
- אלכסיי החליט לקנות שלוש חבילות של בולים נדירים (בשבילו ובשביל שני חברים). כל חבילה מורכבת מהבולים א, ב ו-ג. הוא מצא באינטרנט שלוש חנויות, אבל כל חנות מכרה בולים בזוגות בלבד. החנות הראשונה מכרה את הזוג "בול א + בול ב" ב-200 לירות, החנות השנייה מכרה את הזוג "בול ב + בול ג" ב-300 לירות ובחנות השלישית הזוג "בול ג + בול א" עלה x לירות. אלכסיי חישב את הכמות המינימלית של כסף שדרוש בשביל הקנייה. אולם לאחר מכן הוא החליט שהוא רוצה לבקר רק בשתי חנויות, ובעקבות כך כמות הכסף המינימלית הנדרשת עלתה ב-120 לירות. מה יכול להיות ערכו של x ?
- הציגו את הפולינום $33x^4 + 578$ בתור סכום ריבועים של כמה שפחות פולינומים עם מקדמים שלמים.

אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה
"פורמולו דה אינגרצו" \ "המילניום השלישי"
שנת 2016/2017. שלב ראשון

בעיות לכיתה י"א

אנא מכם, אל תשכחו לבסס את תשובותיכם.

1. כל הקודקודים של מצולע בעל 789 צלעות נצבעו באדום. כמו כן, סומנו 615 נקודות אדומות בתוך המצולע. אף שלוש נקודות אדומות לא נמצאות על ישר אחד. המצולע חולק למשולשים שקודקודיהם הם כל הנקודות האדומות ורק הן. כמה משולשים יש?
2. מהו הערך המקסימלי האפשרי של המחלק המשותף המרבי של $n^2 + 3$ ו- $(n + 1)^2 + 3$ כאשר n הוא מספר שלם חיובי?
3. אורכי האלכסונים של הפאות של תיבת דואר הם 4, 6 ו-7. האם ניתן להכניס לתוך התיבה כדור מקוטר 2?
4. על הצלעות AB ו- AC של המשולש ABC נבחרו נקודות X ו- Y כך ש- $AX = BY$. בנוסף, הנקודות A, X, Y, C נמצאות על מעגל אחד. B_1 היא עקב חוצה-הזווית של הזווית B . הוכיחו שהישרים XB_1 ו- YC מקבילים.
5. אלכסיי החליט לקנות שלוש חבילות של בולים נדירים (בשבילו ובשביל שני חברים). כל חבילה מורכבת מהבולים א, ב ו-ג. הוא מצא באינטרנט שלוש חנויות, אבל כל חנות מכרה בולים בזוגות בלבד. החנות הראשונה מכרה את הזוג "בול א + בול ב" ב-200 לירות, החנות השנייה מכרה את הזוג "בול ב + בול ג" ב-300 לירות ובחנות השלישית הזוג "בול ג + בול א" עלה x לירות. אלכסיי חישב את הכמות המינימלית של כסף שדרוש בשביל הקנייה. אולם לאחר מכן הוא החליט שהוא רוצה לבקר רק בשתי חנויות, ובעקבות כך כמות הכסף המינימלית הנדרשת עלתה ב-120 לירות. מה יכול להיות ערכו של x ?
6. הציגו את הפולינום $6x^4 + 5$ בתור סכום ריבועים של כמה שיותר פולינומים עם מקדמים שלמים.
7. מחברי האולימפיאדה מחליטים בעזרת הצבעה איזו בעיה (א' או ב') להכניס לשאלון. לשם כך כל המחברים מודיעים בזה אחר זה איזו בעיה הם אהבו יותר. בסוף ההצבעה התברר שבעיה א' "ניצחה" עם ניקוד סופי של 5:11, ובכל רגע נתון היו לה לפחות פי שניים קולות מאשר לבעיה ב'. בכמה דרכים שונות הייתה יכולה לעבור ההצבעה?

אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה
"פורמולו דה אינגרצו" \ "המילניום השלישי"

שנת 2016/2017. שלב ראשון

בעיות לכיתה י"ב

אנא מכם, אל תשכחו לבסס את תשובותיכם.

1. עבור כמה ערכים שלמים חיוביים של n מתקיים אי-השוויון
$$? \sin \frac{10\pi}{n} > \cos \frac{10\pi}{n}$$
2. מהו הערך המקסימלי האפשרי של המחלק המשותף המרבי של $n^2 + 3$ ו- $(n + 1)^2 + 3$ כאשר n מספר שלם חיובי?
3. נקרא למספרים מהצורה $2^x + 3^y$, כאשר x ו- y הם שלמים אי-שליליים, מוצלחים. קל לראות שהמספרים $5 = 2^1 + 3^1 = 2^2 + 3^0$ ו- $11 = 2^3 + 3^1 = 2^1 + 3^2$ הם דאבל-מוצלחים (כלומר ניתנים להצגה בצורה הנ"ל בשתי דרכים שונות). כמה מספרים דאבל-מוצלחים יש?
4. על הצלעות AB ו- AC של המשולש ABC נבחרו נקודות X ו- Y כך ש- $AX = BY$. בנוסף, הנקודות A, X, Y, C נמצאות על מעגל אחד. B_1 היא עקב חוצה-הזווית של הזווית B . הוכיחו שהישרים XB_1 ו- YC מקבילים.
5. אב רוצה לשלוח לבנו 13 כדורים זהים. לשם כך הוא קנה תיבת דואר שאורכי האלכסונים של הפאות שלה הם 4, 6 ו-7. התברר שכדור אחד נכנס בתוך התיבה. האם בהכרח ניתן להכניס לתוכה את כל 13 הכדורים?
6. מחברי האולימפיאדה מחליטים בעזרת הצבעה איזו בעיה (א' או ב') להכניס לשאלון. לשם כך כל המחברים מודיעים בזה אחר זה איזו בעיה הם אהבו יותר. בסוף ההצבעה התברר שבעיה א' "ניצחה" עם ניקוד סופי של 11:5, ובכל רגע נתון היו לה לפחות פי שניים קולות מאשר לבעיה ב'. בכמה דרכים שונות הייתה יכולה לעבור ההצבעה?
7. האם פולינום ממעלה 3 (כלומר פולינום מהצורה $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ כאשר $a \neq 0$) עם מקדמים שלמים יכול לקבל את הערכים 1,2,3,4 עבור ערכים שלמים של x ?