Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

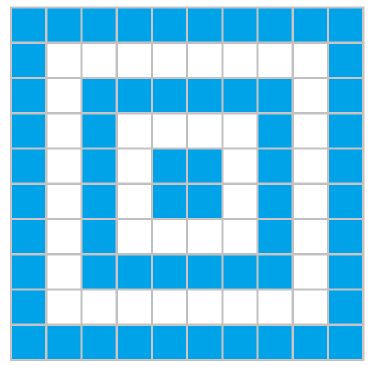
2015/2016 год. Второй тур
Решения

Задачи для 5 класса

1. Придумайте пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 1000.

   Решение. Заметим, что $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 25$. Ответ: 1, 2, 4, 5, 25.

2. Каждая клетка доски 10×10 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку радостной, если ровно две соседних с ней клетки синие. Закрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными. (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

   Решение. Например, так.

3. Вот задача из задачника С. А. Рачинского (конец XIX века): «Сколько досок длиною в 6 аршин, шириною в 6 вершков нужно, чтобы замостить пол в квадратной комнате, коей сторона — 12 аршин?» Ответ к задаче: 64 доски. Установите по этим данным, сколько вершков в аршине.

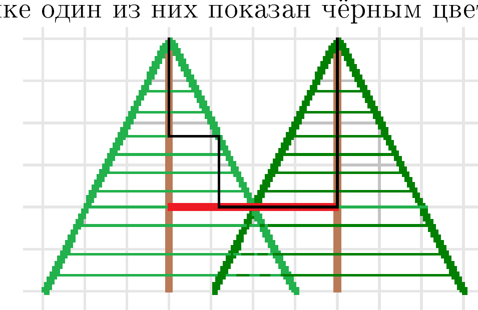
   Решение. Площадь комнаты составляет $12 \cdot 12 = 144$ квадратных аршина. Значит, площадь каждой доски равна $144/64 = 2{,}25$ квадратных аршина. Поскольку длина доски 6 аршин, то её ширина должна быть $2{,}25/6 = 3/8 = 6/16$ аршина. Таким образом, 6 вершков составляют $6/16$ аршина, значит, 1 вершок — это $1/16$ аршина.

   Другое решение. Заметим, что общая площадь досок, покрывающих комнату, не зависит от их расположения. Поэтому можно считать, что они лежат в два ряда по 32 доски в каждом ряду. Длина каждого ряда равна стороне комнаты (12 аршин), в то же время она в 32 раза больше, чем ширина доски (6 вершков). Значит, 12 аршин в 32 раза больше, чем 6 вершков. Поэтому 6 аршин в 16 раз больше, чем 6 вершков, то есть аршин в 16 раз больше, чем вершок.

   Ответ: в аршине 16 вершков.

4. На поляне на расстоянии 20 метров одна от другой растут две ели высотой по 30 метров. Ветки елей растут очень густо, и среди них есть направленные точно навстречу друг другу, а длина каждой ветки вдвое меньше расстояния от неё до вершины. Паук может ползти по стволу (вверх или вниз строго по вертикали), по веткам (строго по горизонтали), либо спускаться вертикально вниз по паутине с одной ветки на другую. Какое наименьшее расстояние ему придётся проползти, чтобы добраться с вершины одной ели на вершину другой?

   Решение. По рисунку видно, что ветви елей пересекаются на высоте не более 10 метров от земли. Действительно, на этой высоте расстояние до верхушки — 20 метров, поэтому длина каждой ветки $20/2 = 10$ метров, и суммарная длина веток двух елей как раз равна расстоянию между ними. Поэтому паук в любом случае должен спуститься на высоту 10 метров, а потом подняться. Значит, ему надо преодолеть не менее 40 метров по вертикали. Ещё нужно пройти хотя бы 20 метров по горизонтали. Итого его путь составит хотя бы 60 метров. Заметим, что существует много путей длины 60 метров (на рисунке один из них показан чёрным цветом).



Возможно другое понимание задачи, при котором путь, который паук проделал вниз по паутине, не учитывается (он падает, а не ползёт). Тогда ответ равен 40 метрам (20 по горизонтали и 20 вверх).

5. У Никиты есть волшебная банка. Если в банку положить n конфет и закрыть на час, то количество лежащих в ней конфет увеличится на сумму цифр числа n. Например, если было 137 конфет, то станет $137 + 1 + 3 + 7 = 148$. Какое максимальное количество конфет Никита может получить за 20 часов 16 минут, если вначале у него одна конфета?

   Решение. Нужно стремиться к тому, чтобы по истечении каждого часа количество конфет было как можно больше. Но это не значит, что все конфеты надо всегда класть в банку. Наибольшая сумма цифр (то есть наибольший прирост числа конфет) получается у числа, в котором все цифры (кроме первой) — девятки.

   1 час: 1+1=2
   2 час: 2+2=4
   3 час: 4+4=8
   4 час: 8+8=16
   5 час: (кладём 9 конфет) 16+9=25
   6 час: (кладём 19 конфет) 25+10=35
   7 час: (кладём 29 конфет) 35+11=46
   8 час: (кладём 39 конфет) 46+12=58
   9 час: (кладём 49 конфет) 58+13=71
   10 час: (кладём 69 конфет) 71+15=86
   11 час: (кладём 79 конфет) 86+16=102
   12 час: (кладём 99 конфет) 102+18=120
   13–17 часы: кладём по 99 конфет, число конфет каждый час увеличивается на 18, итого получаем 138, 156, 174, 192, 210 конфет.
   18–20 часы: кладём по 199 конфет, число конфет каждый час увеличивается на 19, итого получаем 229, 248, 267 конфет.
   За оставшиеся 16 минут что-либо получить невозможно.
   Ответ: 267 конфет.

Задачи для 6 класса

1. Каждая клетка доски 10×10 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку радостной, если ровно две соседних с ней клетки синие. Закрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными. (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)
   Решение: см. задачу 5.2.

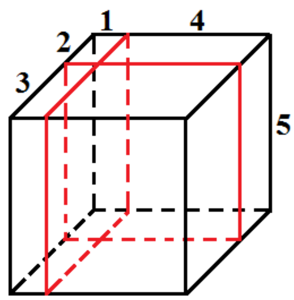
2. Вот задача из задачника С. А. Рачинского (конец XIX века): «Сколько досок длиною в 6 аршин, шириною в 6 вершков нужно, чтобы замостить пол в квадратной комнате, коей сторона — 12

аршин?» Ответ к задаче: 64 доски. Установите по этим данным, сколько вершков в аршине.
Решение: см. задачу 5.3.

3. У Никиты есть волшебная банка. Если в банку положить n конфет и закрыть на час, то количество лежащих в ней конфет увеличится на сумму цифр числа n. Например, если было 137 конфет, то станет $137 + 1 + 3 + 7 = 148$. Какое максимальное количество конфет Никита может получить за 20 часов 16 минут, если вначале у него одна конфета?
Решение: см. задачу 5.5.

4. Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.

   Решение. Куб можно разрезать на четыре типичных параллелепипеда. Например, куб $5 \times 5 \times 5$ разрезается на параллелепипеды $5 \times 3 \times 1$, $5 \times 3 \times 4$, $5 \times 2 \times 1$, $5 \times 2 \times 4$.

   На меньшее число типичных параллелепипедов разрезать куб невозможно. Действительно, у куба 8 вершин; если он разрезан на три или менее параллелепипедов, то какой-то из них содержит хотя бы три вершины куба.
   Если все эти три вершины расположены на одной грани куба (например, на верхней), то параллелепипед содержит всю верхнюю грань куба; значит, у него есть два одинаковых измерения. Пусть две вершины расположены на верхней грани куба и одна — на нижней. Тогда параллелепипед содержит хотя бы одно из рёбер верхней грани, а ещё его высота равна высоте куба. Опять имеем два одинаковых измерения.

   Ответ: на 4 типичных параллелепипеда.

5. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.

   Решение. Лидии нравятся пятизначные числа, составленные только из цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8. Заметим, что все такие числа можно разбить на пары следующим способом: каждую цифру a заменим на $9 - a$, то есть 1 заменяется на 8, 2 на 7, 4 на 5 и наоборот. Например, число 42718 находится в паре с числом 57281. Это разбиение хорошо тем, что сумма цифр в каждой паре равна 45 (потому что сумма двух цифр в каждом разряде равна 9).
   Осталось выяснить, сколько всего таких пар. Для этого найдём общее количество чисел. В первом разряде может стоять любая из шести цифр, во втором — тоже любая из шести и т. д. Общее количество чисел равно 6^5. А количество пар — $6^5/2$, и сумма цифр в каждой из них — 45. Общая сумма цифр равна $45 \cdot 6^5/2 = 45 \cdot 7776/2 = 45 \cdot 3888 = 174960$.

   Другое решение. Найдём общую сумму цифр, стоящих в старшем разряде всех чисел. Существует 6^4 чисел, которые начинаются с единицы, и сумма их первых цифр равна $1 \cdot 6^4$. Ещё есть 6^4 чисел, начинающихся с двойки, и сумма первых цифр в них равна $2 \cdot 6^4$. Аналогично поступаем с числами, начинающимися на 3, 4, 7, 8. Получаем общую сумму цифр в старшем разряде $(1+2+4+5+7+8) \cdot 6^4 = 27 \cdot 6^4$. В каждом из остальных разрядов сумма цифр такая же, поэтому всего имеем $5 \cdot 27 \cdot 6^4 = 174960$.

   Замечание. Цифра 0 делится на 3 $(0 : 3 = 0)$, поэтому в указанные числа входить не может.
   Ответ: 174960.

Задачи для 7 класса

1. Придумайте пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 1000.
   Решение: см. задачу 5.1.

2. На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если первый прямоугольник содержит 2015 клеток, а второй — 2016.

   Решение. Общая часть этих двух прямоугольников (если она непуста) является прямоугольником. Определим максимально возможные длины его сторон.
   Вертикальная сторона первого прямоугольника короче горизонтальной, поэтому она меньше $\sqrt{2015}$, то есть меньше 45; то же верно и для горизонтальной стороны второго прямоугольника. В то же время стороны пересечения не могут превышать соответствующих сторон исходных прямоугольников (но, очевидно, могут быть им равны).
   Заметим, что $2015 = 5 \cdot 403 = 5 \cdot 13 \cdot 31$; $2016 = 4 \cdot 504 = 4 \cdot 4 \cdot 126 = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.
   С учётом этого вертикальная сторона не больше 31, а горизонтальная — не больше 42 (это самые большие делители чисел 2015 и 2016, которые меньше 45). Значит, стороны пересечения не превосходят 31 и 42, а площадь не больше $31 \cdot 42 = 1302$. Случай равенства, очевидно, достигается для прямоугольников 65×31 и 42×48, совмещённых, например, левыми верхними клетками.

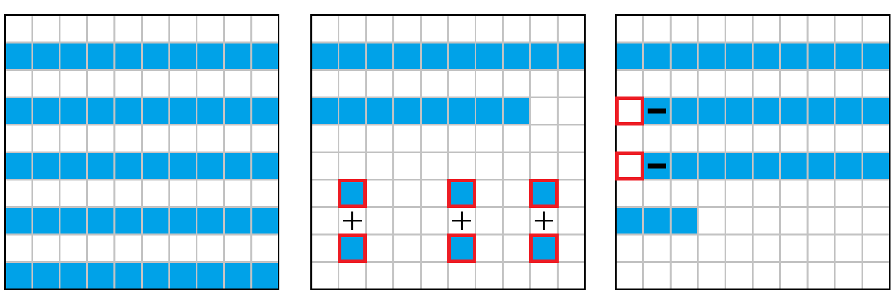
   Ответ: 1302.

3. Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.
   Решение: см. задачу 6.4.

4. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.
   Решение: см. задачу 6.5.

5. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Для каких n можно раскрасить доску так, чтобы на ней было ровно n равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

   Решение. Заметим, что минимальное количество равновесных клеток — 0 (например, если все клетки белые).
   Найдём максимальное количество равновесных клеток. Клетки, лежащие на границе доски, но не в углу, не могут оказаться равновесными, поскольку у них нечётное количество соседей (три). Таких клеток $4 \cdot 98 = 392$. Все остальные клетки можно сделать равновесными, например, при полосатой раскраске (см. рисунок a). Количество этих клеток $10000 - 392 = 9608$.



a b c

Будем называть число r достижимым, если существует раскраска с r равновесными клетками. Мы знаем, что числа 0 и 9608 достижимы. Докажем, что все числа от 0 до 9608 тоже достижимы.

Для этого возьмём белую доску и будем постепенно закрашивать её в полосатую раскраску. Поскольку закраска одной клетки влияет только на равновесность её соседей, то с каждой новой закрашенной клеткой число равновесных клеток меняется не более чем на 4. В начале процесса оно равно 0, а в конце — 9608. Значит, разность между двумя соседними достижимыми числами в промежутке от 0 до 9608 не превосходит 4.

Осталось научиться изменять количество равновесных клеток на 1, 2 или 3. Для этого докажем два вспомогательных утверждения.
1) Если число $r \leqslant 5000$ достижимо, то числа $r+1$, $r+2$, $r+3$ достижимы. Действительно, в этом случае на доске много свободного (белого) места. Можно поместить вдалеке от остальных синих клеток две синих клетки, между которыми ровно одна белая (см. рисунок b) — это увеличит количество равновесных клеток на 1; так можно сделать даже трижды.
2) Если число $r \geqslant 5000$ достижимо, то числа $r-1$, $r-2$, $r-3$ достижимы. Действительно, в этом случае на доске много синих полос. Можно перекрасить самую левую клетку любой из этих полос в белый цвет (см. рисунок c), и соседняя с ней клетка перестанет быть равновесной. Так можно сделать даже трижды.
Из утверждения 1 следует, что все числа от 0 до 5000, достижимы; из утверждения 2 следует, что достижимы все числа от 5000 до 9608.

Ответ: от 0 до 9608 включительно.

Задачи для 8 класса

1. Существуют ли три таких различных цифры A, B, C, что $\overline{ABC}$, $\overline{CBA}$, $\overline{CAB}$ — квадраты натуральных чисел? (Черта над цифрами означает число, составленное из этих цифр в указанном порядке.)

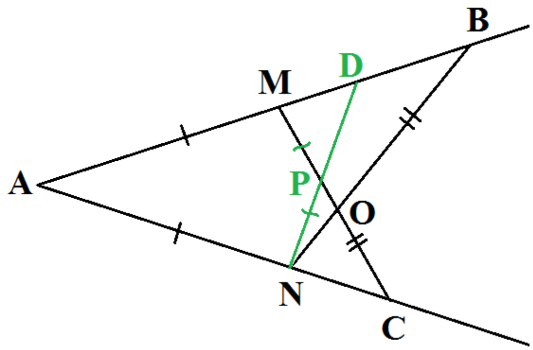
   Решение. Да. Это цифры $A = 9, B = 6, C = 1$. D этом случае $961 = 31^2, 169 = 13^2, 196 = 14^2$.

2. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Какое максимальное количество равновесных клеток может оказаться на доске? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

   Решение. Клетки, лежащие на границе доски, но не в углу, не могут оказаться равновесными, поскольку у них нечётное количество соседей (три). Таких клеток $4 \cdot 98 = 392$.
   Все остальные клетки можно сделать равновесными, например, при полосатой раскраске (первая строка синяя, вторая белая, третья синяя и т.д.). Количество этих клеток $10000 - 392 = 9608$.
   Ответ: 9608.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O, причём $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.

   Решение. Предположим, что это неверно, например, что $AB > AC$. Отметим на стороне AB такую точку D, что $AD = AC$. В силу симметрии, отрезки MC и ND пересекаются в некой точке P, причём $PM = PN$. Из симметрии также следует, что $CM = DN$.



Итак, $NP = PM$;
$NO - OP < PM$ (т.к. $NO - OP < NP$ из неравенства треугольника);
$NO < OP + PM$, откуда $NO < OM$;
поскольку $OB = OC$, то $NO + OB < OM + OC$;
иначе говоря, $NB < MC$,
или, что то же самое, $NB < ND$.

Однако $\angle BDN$ тупой (поскольку он больше угла BMN, а он, в свою очередь, является тупым как смежный с острым углом при основании равнобедренного треугольника AMN). Сторона $\triangle BDN$, лежащая напротив тупого угла, не может быть короче другой его стороны, то есть неравенство $NB < ND$ невозможно. Противоречие.

4. На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если каждый прямоугольник содержит больше 2010, но меньше 2020 клеток.

Решение. Общая часть этих двух прямоугольников (если она непуста) является прямоугольником. Определим максимально возможные длины его сторон.
Вертикальная сторона первого прямоугольника короче горизонтальной, поэтому она меньше $\sqrt{2020}$, то есть меньше 45; то же верно и для горизонтальной стороны второго прямоугольника. В то же время стороны пересечения не могут превышать соответствующих сторон исходных прямоугольников (но, очевидно, могут быть им равны).
Найдём наибольшую возможную длину каждой из этих сторон. Для этого найдём наибольшее из чисел, меньших 45, которое является делителем какого-нибудь числа от 2011 до 2019 включительно. Можно заметить, что ни одно из чисел $2011, \ldots, 2019$ не делится ни на 44 (т. к. $2024 = 45^2 - 1^2 = 44 \cdot 46$ делится на 44), ни на 43 (т. к. $2021 = 45^2 - 2^2 = 43 \cdot 48$ делится на 43). Зато число 2016 делится на 42 (т. к. $2024 = 45^2 - 3^2 = 42 \cdot 48$), поэтому максимально возможная длина каждой из сторон пересечения — 42. Значит, максимальная его площадь — $42^2 = 1764$. Это значение достигается для прямоугольников 48×42 и 42×48, совмещённых, например, левыми верхними клетками.

Ответ: 1764.

5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры). А числа 1123, 2231, 3311 не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
Сколько всего сетов существует в игре?
(Перестановка чисел не приводит к образованию нового сета: 1232, 2213, 3221 и 2213, 1232, 3221 — один и тот же сет.)

Решение. Заметим, что для любых двух чисел существует ровно один сет, в котором они встречаются. Действительно, третье число этого сета строится так: в тех разрядах, где первые два числа совпадают, третье число имеет такую же цифру; в разряде, где первые два числа различаются, третье число получает оставшуюся цифру. Например, для чисел 1231 и 1223 третьим в сете будет 1212.

Назовём «упорядоченным сетом» сет из трёх четырёхзначных чисел с учётом их порядка. На первое место в такой последовательности можно поставить любое из 81 чисел, на второе — любое из 80 оставшихся; на третье — ровно одно (по описанному выше принципу). Всего упорядоченных сетов $81 \cdot 80 \cdot 1$. Заметим, что каждый неупорядоченный сет $\{a, b, c\}$ соответствует шести упорядоченным: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Поэтому упорядоченных сетов в 6 раз меньше.

Ответ: $81 \cdot 80/6 = 1080$.

Задачи для 9 класса

1. Найдите все такие числа k, для которых
$$(k/2)!\,(k/4) = 2016 + k^2.$$
Знаком $n!$ обозначен факториал числа n, то есть произведение всех целых чисел от 1 до n включительно (определён только для целых неотрицательных чисел; $0! = 1$).

Решение. Заметим, что левая часть имеет смысл только для чётных значений k. Непосредственно убеждаемся, что $k = 2, 4, 6, 8, 10$ не подходят, а $k = 12$ даёт верное равенство.
При каждом дальнейшем увеличении k на 2 выражение $(k/2)!$ увеличивается хотя бы в 7 раз, т. е. левая часть растёт более чем в 7 раз. В то же время правая часть увеличивается менее чем вдвое: $(k+1)^2 - k^2 < 2016 + k^2$ при всех $k \geqslant 12$. Поэтому при $k > 12$ левая часть больше правой.
Ответ: $k = 12$.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O, причём $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.
Решение: см. задачу 8.2.

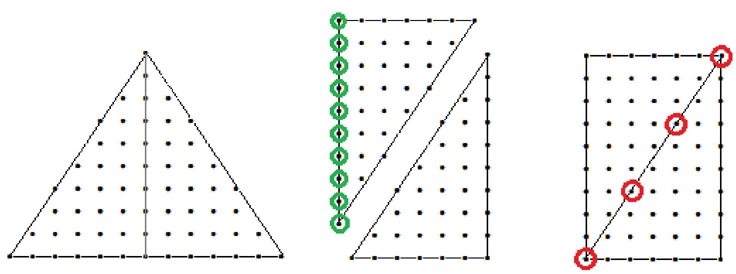
3. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.
Решение: см. задачу 6.5.

4. На координатной плоскости нарисовали равнобедренный треугольник ABC: $AB = 2016$, $BC = AC = 1533$, причём вершины A и B лежат в узлах на одной горизонтали. Определите, сколько узлов лежит в треугольнике ABC (включая узлы, лежащие на сторонах). Узлом называется точка координатной плоскости, у которой обе координаты целые.

Решение. Заметим, что $1533^2 - 1008^2 = (1533 - 1008)(1533 + 1008) = 525 \cdot 2541 = 21 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 363 = 7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11^2 = (7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11)^2 = 1155^2$. Значит, высота треугольника равна 1155.

Видим, что НОД чисел 1155 и 1008 равен 21. Это значит, что на боковой стороне имеется 22 узла (включая вершины), которые делят её на 21 равную часть.

Дальнейшая часть решения основана на том, что треугольник постепенно трансформируется в прямоугольник 1008×1155, количество узлов в котором легко посчитать. Схематично этот процесс представлен на рисунке. Обозначим искомое количество узлов в треугольнике через T.

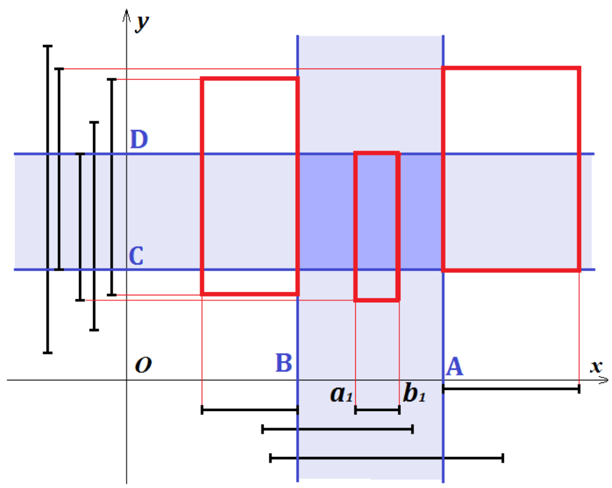


1) Разрежем треугольник по оси симметрии на две половины (два прямоугольных треугольника) и рассмотрим каждую из них как отдельную фигуру. Сумма количеств узлов в этих половинах на 1156 больше, чем в исходном треугольнике, то есть $T + 1156$, поскольку узлы, находившиеся на оси симметрии, продублировались.
2) Соединим эти две половины в прямоугольник 1008×1155. Внутренние части половин полностью покрывают прямоугольник, при этом 22 узла, находящиеся в этих половинах, совпали. Поэтому количество узлов в прямоугольнике на 22 меньше, чем в двух половинах, то есть $T + 1156 - 22$.
В то же время это количество, очевидно, равно $1009 \cdot 1156$. Значит, $T + 1156 - 22 = 1009 \cdot 1156$;
$T = 1008 \cdot 1156 + 22 = 1156000 + 9248 + 22 = 1165270$.

Ответ: 1165270 узлов.

5. На плоскости расположено 100 прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям. Каждый пересекается хотя бы с 90 другими. Докажите, что найдётся прямоугольник, пересекающийся со всеми.

Решение. Спроецируем все прямоугольники на ось x, в результате каждый из них перейдёт в отрезок $[a_i, b_i]$ $(i = 1, \ldots, 100)$.
Обозначим через A наибольшую координату начала, а через B — наименьшую координату конца (то есть $A = \max a_i$, $B = \min b_i$). Для дальнейшего решения несущественно, какое из чисел A и B больше; возможно и равенство. Независимо от этого отрезок, ограниченный числами A и B, будем обозначать AB (в случае $A = B$ он вырождается в точку).
Каждый отрезок $[a_i, b_i]$ пересекается (хотя бы по одной точке) с отрезком AB. Действительно, если для какого-то отрезка $[a, b]$ это не так, то он расположен либо целиком слева, либо целиком справа от AB. В первом случае $b < B$, но это противоречит определению числа B как наименьшего из b_i; во втором случае $a > A$, но и это аналогичным образом невозможно.
Точно так же можно спроецировать прямоугольники на вертикальную ось, получив отрезки $[c_i, d_i]$. Мы обнаружим, что если $C = \max c_i$, $D = \min d_i$, то каждый отрезок пересекается с отрезком CD.



Обозначим буквой R прямоугольник с вершинами в точках (A, C), (A, D), (B, C), (B, D). Возвращаясь от проекций к прямоугольникам, мы получаем, что каждый прямоугольник из условия пересекается с прямоугольником R.

Докажем теперь, что хотя бы один из ста прямоугольников исходного набора содержит в себе все четыре вершины прямоугольника R (тогда получится, что он содержит весь R, а значит, пересекается со всеми прямоугольниками набора). Условимся говорить, что у каждого прямоугольника есть левая, правая, нижняя и верхняя координаты (это числа a_i, b_i, c_i и d_i из предыдущего рассуждения).
Хотя бы 90 прямоугольников пересекаются с тем прямоугольником, левая координата которого равна B (такой прямоугольник есть, см. определение числа B), значит, есть не более 9 прямоугольников, левая координата которых больше B.
Аналогично, есть не более 9 прямоугольников, правая координата которых меньше A; не более 9 прямоугольников, нижняя координата которых больше D; и не более 9 прямоугольников, верхняя координата которых меньше C.
Значит, у остальных прямоугольников (а их не меньше чем $100 - 9 \cdot 4$, т. е. не меньше 64) правая координата не меньше A, левая не больше B, верхняя не меньше C, а нижняя не больше D.
Возьмём любой из таких прямоугольников. Мы доказали, что его правая координата не меньше A; однако его левая координата не больше A (по определению числа A). Значит, этот прямоугольник пересекает прямую $x = A$. Аналогично доказывается, что он пересекает прямые $x = B$, $y = C$, $y = D$. Очевидно, из этого следует, что он содержит все четыре точки $(A, C), (A, D), (B, C), (B, D)$.
Требуемый прямоугольник найден.

Задачи для 10 класса

1. В некотором треугольнике сумма тангенсов углов оказалась равна 2016. Оцените (хотя бы с точностью до 1 градуса) величину наибольшего из его углов.

   Решение. Один из тангенсов должен превосходить 600. Это возможно только для угла, очень близкого к $90°$. Докажем, что он превосходит $89{,}5°$. Это эквивалентно утверждению, что $\operatorname{tg} 0{,}5° > 1/600$.
   Начнём с равенства $\sin 30° = 1/2$. Заметим, что $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, поэтому $\sin x = \frac{\sin 2x}{2\cos x} > \frac{\sin 2x}{2}$ для острых углов. Отсюда:
   $\sin 32° > 1/2$; $\sin 16° > 1/4$; $\sin 8° > 1/8$;
   $\sin 4° > 1/16$; $\sin 2° > 1/32$; $\sin 1° > 1/64$;
   $\sin 0{,}5° > 1/128 > 1/600$; $\operatorname{tg} 0{,}5° > 1/600$.

   Итак, один из углов треугольника заключён в промежутке от 89,5 до 90 градусов. Заметим, что он может оказаться и не самым большим; но в этом случае самый большой угол меньше $90{,}5°$. Значит, с точностью до градуса наибольший угол в любом случае равен $90°$.

2. Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.
   Решение: см. задачу 6.4.

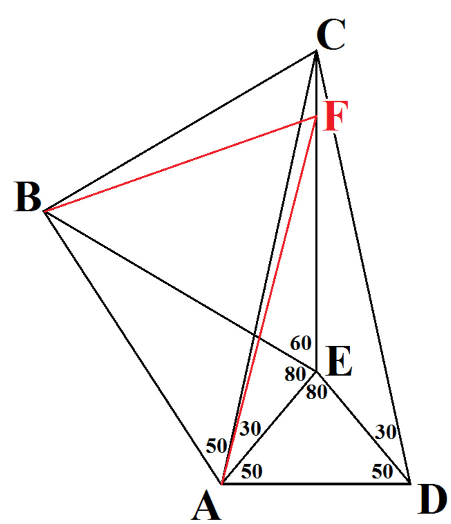
3. Найдите все натуральные числа n, для которых $2^n + n^{2016}$ — простое число.

   Решение. Рассмотрим три случая.

   - Если n чётно, то данное число тоже чётно (и больше двух при $n > 0$).
   - Если n нечётно и не делится на 3, то 2^n даёт остаток 2 от деления на 3, а $n^{2016} = (n^{504})^4$ даёт остаток 1 от деления на 3, поэтому сумма делится на 3 (и больше трёх при $n > 1$). При $n = 1$ результат равен 3, то есть является простым числом.
   - Наконец, пусть n делится на 3 (и нечётно, что не используется). Тогда число, о котором идёт речь, является суммой кубов: если $n = 3k$, то
     $2^n + n^{2016} = (2^k)^3 + (n^{672})^3 = (2^k + n^{672}) \cdot (2^{2k} - 2^k \cdot n^{672} + n^{2\cdot 672})$ — составное число (очевидно, что $1 < 2^k + n^{672} < 2^n + n^{2016}$ при $\geqslant 3$).

   Ответ: $n = 1$.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ внутри треугольника ADC выбрана точка E, причём $\angle BAE = \angle BEA = 80°$, $\angle CAD = \angle CDA = 80°$, $\angle EAD = \angle EDA = 50°$. Докажите, что $\triangle BEC$ равносторонний.



Решение.

1. Из известных углов находим: $\angle AED = 80°$, $\angle CAE = 80° - 50° = 30°$, $\angle BAC = 80° - 30° = 50°$.
2. Точки C и E равноудалены от концов отрезка AD, поэтому лежат на серединном перпендикуляре к нему. Значит, CE — ось симметрии треугольника ACD, и $\angle AEC = \angle DEC$.
3. Значит, $\angle AED + 2\angle AEC = 360°$, откуда $\angle AEC = 140°$, $\angle BEC = \angle AEC - \angle AEB = 60°$. Осталось доказать, что $BE = EC$.
4. Отметим на луче EC такую точку F, что $EF = EB$, тогда $\triangle BEF$ равносторонний.
5. $BF = BE$, $BE = BA$, поэтому $BF = BA$. Значит , $\triangle BAF$ равнобедренный. Его угол против основания равен $\angle ABF = \angle ABE + \angle EBF = 20° + 60° = 80°$, поэтому угол при основании $\angle BAE = \frac{180° - 80°}{2} = 50°$.
6. Но это значит, что угол BAF совпадает с углом BAC, то есть точка F — с точкой C. Итак, $\triangle BEC$ равносторонний, что и требовалось доказать.

5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
Сложностью сета будем называть количество таких разрядов, где все три цифры различны.
Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет сложности 3 (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры); числа 1231, 1232, 1233 — сет сложности 1 (в первых трёх разрядах цифры совпадают, и только в четвёртом все цифры различны). А числа 1123, 2231, 3311 вообще не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
Сетов какой сложности в игре больше всего и почему?

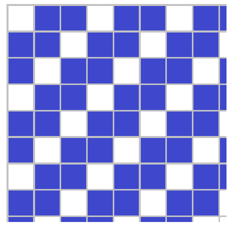
Решение. Заметим, что для любых двух чисел существует ровно один сет, в котором они встречаются. Действительно, третье число этого сета строится так: в тех разрядах, где первые два числа совпадают, третье число имеет такую же цифру; в разряде, где первые два числа различаются, третье число получает оставшуюся цифру. Например, для чисел 1231 и 1223 третьим в сете будет 1212.
Назовём «упорядоченным сетом» сет из трёх четырёхзначных чисел с учётом их порядка. Заметим, что каждый неупорядоченный сет $\{a, b, c\}$ соответствует шести упорядоченным: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Поэтому вместо количества неупорядоченных сетов можно сравнивать количество упорядоченных (их в 6 раз больше). Каждый упорядоченный сет (a, b, c) однозначно определяется упорядоченной парой чисел (a, b).
Посчитаем количество упорядоченных сетов сложности $k > 0$. Каждый такой сет может начинаться произвольным числом a (81 вариант). В этом числе нужно выбрать k разрядов (C_4^k способов выбора) и в каждом из них заменить цифру на одну из двух отличных от неё (2^k способов). В результате получим число b, которое однозначно определяет сет. Итого получаем $81 \cdot C_4^k \cdot 2^k$ упорядоченных сетов сложности k.
Сравнивая числа $f(k) = C_4^k \cdot 2^k$ для разных k, получаем: $f(1) = 8, f(2) = 24, f(3) = 32, f(4) = 16$. Как видим, наибольшее количество сетов имеет сложность $k = 3$.

Ответ: больше всего сетов сложности 3.

Задачи для 11 класса

1. Каждая клетка доски 1000×1000 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Можно ли раскрасить доску так, чтобы на ней было более 600000 синих равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

Решение. Можно. На рисунке показано, как сделать синими равновесными примерно 2/3 клеток доски.

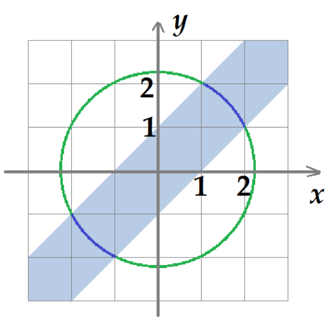


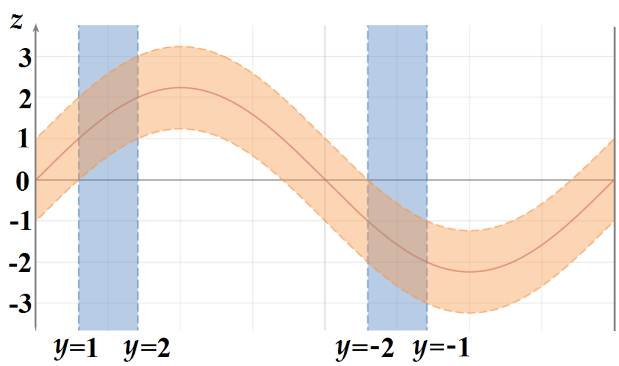
Более точный подсчёт: в каждой строке (кроме первой и последней) все синие клетки, кроме двух крайних, являются равновесными. Имеем 998 строк, в каждой из которых не менее 664 равновесных клеток. $998 \cdot 664 > 600000$.

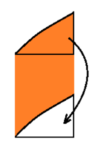
2. Найдите все натуральные числа n, для которых $2^n + n^{2016}$ — простое число.
Решение: см. задачу 10.3.

3. В трёхмерном пространстве задана стандартная система координат. Найдите площадь множества точек удовлетворяющих следующим условиям: $x^2 + y^2 = 5,\ |x - y| < 1,\ |y - z| < 1$.

Решение. Построим множество точек в плоскости xy, удовлетворяющее первым двум условиям (которые не зависят от z). Первое условие задаёт окружность, второе — полосу, их пересечение — две дуги. Длина каждой дуги равна $\sqrt{5}(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1/2)$.







В трёхмерном пространстве окружность соответствует цилиндрической поверхности, а дуги — двум полосам на ней. На рисунке справа изображена развёртка этой поверхности; полосы, удовлетворяющие второму условию, закрашены синим. Область, удовлетворяющая третьему условию, показана оранжевым. Эта область — полоса ширины 2, идущая вдоль линии $z = y$. (Эта линия — синусоида; впрочем, этот факт не используется в решении.) Интересующая нас фигура — пересечение двух вертикальных полос с «синусоидальной» — состоит из двух равных частей. Площадь каждой части вдвое больше ширины синей полосы, что нетрудно установить, переставив криволинейный треугольник, как показано на последнем рисунке. А ширина синей полосы — это длина дуги, найденная ранее.

Ответ: $4\sqrt{5}(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1/2)$.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ внутри треугольника ADC выбрана точка E, причём $\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$, $\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$, $\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$. Докажите, что $\triangle BEC$ равносторонний.
Решение: см. задачу 10.4.

5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
Сложностью сета будем называть количество таких разрядов, где все три цифры различны.
Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет сложности 3 (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры);

числа 1231, 1232, 1233 — сет сложности 1 (в первых трёх разрядах цифры совпадают, и только в четвёртом все цифры различны). А числа 1123, 2231, 3311 вообще не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
Сетов какой сложности в игре больше всего и почему?
Решение: см. задачу 10.5.