УСЛОВИЯ ЗАДАЧ*

2012–2013 год

Формула Единства

Отборочный этап

7–8 классы

13.1. Можно ли нарисовать четыре треугольника так, что внутри каждого из них содержится ровно по одной вершине каждого из остальных треугольников? Вершины не могут лежать на сторонах других треугольников.

13.2. Петя бегает по круговой дорожке. Каждые 5 минут он пробегает мимо Маши, качающейся на качелях, а каждые 15 минут обгоняет пенсионера Михаила Ивановича, который тоже бегает по кругу. В некоторый момент Петя развернулся и побежал с той же скоростью в противоположном направлении. Как часто он теперь встречается с Михаилом Ивановичем?

13.3. Дети загадали натуральное число и произнесли следующие девять фраз: «Число делится на 2», «Число делится на 3, но не делится на 2», «Число делится на 4, но не делится на 3», ..., «Число делится на 10, но не делится на 9». Какое наибольшее количество фраз могут быть верными одновременно?

---

*Сборник задач олимпиады, включающий также подробные решения, исторические и статистические сведения, вы можете заказать у организаторов. Все подробности можно узнать, кликнув по этой **ссылке**.

13.4. Можно ли разбить числа от 1 до 2012 на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре содержала в десятичной записи только нули и четверки?

13.5. В некоторых клетках доски 8×8 стоит по фишке, причем в каждой строке и в каждом столбце фишек не менее четырех. Всегда ли можно снять часть фишек так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце осталось ровно по 4 фишки?

13.6. В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если к весу любого слона, кроме последнего, прибавить удвоенный вес стоящего за ним, то получится 15 тонн. Найдите вес каждого из слонов (и докажите, что он не может быть другим).

9–10 классы

13.7. Толик умножил пятизначное число на сумму его цифр. Потом Толик умножил результат на сумму его (результата) цифр. Удивительно, но получилось опять пятизначное число. Какое число Толик умножал в первый раз? (Найдите все возможные варианты ответа.)

13.8. В квадрате 7×7 каждый квадратик 1×1 покрасили в красный, желтый или зеленый цвет. Докажите, что существуют строка, столбец и цвет такие, что и в строке, и в столбце есть по крайней мере 3 квадратика этого цвета.

13.9. Сколько есть способов выписать в строку n букв A и n букв B так, чтобы в строке не встречался фрагмент ABB?

13.10. В остроугольном треугольнике ABC угол C равен 45 градусам, AA_1 и BB_1 — высоты. Докажите, что

$$A_1B_1 = \sqrt{\frac{A_1B^2 + A_1C^2}{2}}.$$

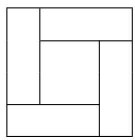
13.11. Вдоль окружности расставлено 100 чисел, каждое из которых равно либо 2, либо 5, либо 9, причем никакие два равных числа не стоят рядом. Числа разбили на 50 пар рядом стоящих. Числа в парах перемножили и полученные 50 произведений записали на первую доску. Затем эти же 100 чисел разбили на 50 пар рядом стоящих другим способом, числа в парах снова перемножили и произведения записали на вторую доску. Докажите, что суммы чисел, написанных на первой и второй досках, равны.

13.12. Натуральные числа n и k таковы, что $k^2 + n^2 - k$ делится на kn. Докажите, что k — точный квадрат.

Заключительный этап

7 класс

13.13. На рисунке изображен квадрат, разбитый на прямоугольники. Докажите, что если площади четырех «угловых» прямоугольников равны, то «центральный» — квадрат.



13.14. Ежедневно Андрей спускается в метро по эскалатору. Если он сбегает на одну ступень в секунду, то спускается за 96 секунд, а если на две ступени в секунду, то за 60 секунд. За какое время спустится Андрей, если будет стоять неподвижно?

13.15. У марсиан есть голова, спина, рука, нога и хвост. Каждая из этих частей тела может быть красной, желтой, зеленой или синей. Однажды компания марсиан собралась и обнаружила, что у каждого из них хотя бы одна из перечисленных частей тела уникальна (то есть окрашена в цвет, в который эта часть тела не окрашена больше ни у кого из компании). Какова максимально возможная численность компании?

13.16. Сколько из чисел от 1 до 2013 делятся на 5 и при этом имеют сумму цифр, кратную 5?

13.17. На столе стоят десять коробок, в одной из них 550 конфет, в другой 450, остальные пусты. За один ход разрешается выбрать любые две коробки и переложить часть конфет из одной в другую так, чтобы в этих коробках стало поровну конфет (если число конфет получается дробным, то такая операция запрещена). Можно ли с помощью таких ходов добиться того, чтобы в двух коробках было по 200 конфет, а в остальных по 75?

8 класс

13.18. В шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны параллельны, и к тому же $AB = DE$. Докажите, что $BC = EF$, а $CD = FA$.

13.19. *Смотри задачу* **13.14**.

13.20. *Смотри задачу* **13.15**.

13.21. *Смотри задачу* **13.16**.

13.22. Коле подарили набор из шести палочек, причем все палочки имеют разную длину. Коля сложил из них два подобных треугольника (при этом он использовал каждую палочку в качестве стороны одного из треугольников). Тут к нему подошла Даша и сложила из тех же палочек два других треугольника, которые тоже оказались подобны между собой. Приведите пример такого набора палочек (то есть укажите длину каждой палочки).

9–10 классы

13.23. В числе 123456789 можно взять любые 2 цифры одинаковой четности и заменить каждую из них на их среднее арифметическое. Можно ли такими операциями получить число, большее 800000000?

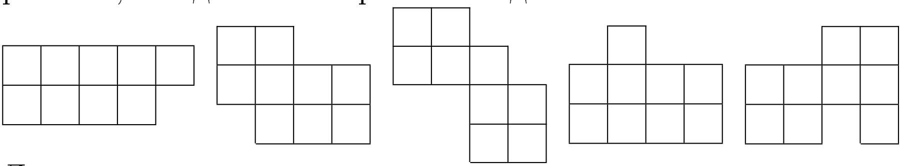
13.24. Сумма трех различных натуральных чисел равна 2013. Какое наибольшее значение может принимать их НОД (наибольший общий делитель)?

13.25. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y соответственно. Пусть Z — точка пересечения AY и CX. Оказалось, что $AY = YC$ и $AB = CZ$. Докажите, что точки B, Y, Z, X лежат на одной окружности.

13.26. Для положительных чисел x, y и z докажите неравенство

$$(1 + x + 2x^2)(2 + 3y + y^2)(4 - 11z + 8z^2) \geqslant 7xyz.$$

13.27. В конструкторе есть n плоских фигурок из 9 квадратиков, каждая из которых выглядит так:



Докажите, что при нечетном n из них нельзя сложить прямоугольник $9 \times n$.

Третье тысячелетие

5 класс

13.28. Маша хочет разложить 9 карандашей в 5 разных коробок так, чтобы количество карандашей в коробках было попарно различным. Как это сделать? (Если это невозможно, то объясните, почему.)

13.29. В любую клетку квадрата 5×5 разрешается поставить желтую, красную или синюю фишку, но так, чтобы никакие две фишки разных цветов не оказались на одной вертикали или горизонтали. Выставьте наименьшее возможное количество фишек, к которым (с учетом этого запрета) нельзя было бы добавить ни одной еще.

13.30. Даны квадраты 3×3 и 4×4. На какое наименьшее общее число частей нужно их разрезать, чтобы из них можно было сложить квадрат 5×5?

13.31. Ян коллекционирует геометрические модели. Любые две из его моделей отличаются либо по размеру, либо по форме, либо по цвету, либо сразу по нескольким признакам. Есть модели трех размеров (мелкие, средние и крупные), причем их количество попарно различно. Есть модели четырех форм (шары, кубы, пирамиды и цилиндры), причем их количество попарно различно. Есть модели пяти цветов (желтые, синие, красные, белые, зеленые), причем их количество попарно различно. Чему равно наименьшее возможное число моделей в коллекции, удовлетворяющей этим условиям?

13.32. Найдите наибольшее пятизначное число, нацело делящееся на 2013, все цифры которого различны.

13.33. На турнир приезжают 9 шахматистов, каждые два из которых должны будут сыграть одну партию между собой. Организаторы хотят провести турнир в 3 городах в течение 4 дней. Важно, чтобы ежедневно все игроки играли одинаковое число партий, и никому из них не пришлось бы переезжать в другой город в течение игрового дня. Составьте расписание турнира, удовлетворяющее этим требованиям. (Если это невозможно сделать, то объясните, почему.)

6 класс

13.34. Маша хочет разложить 13 карандашей в 6 разных коробок так, чтобы количество карандашей в коробках было попарно различным. Как это сделать? (Если это невозможно, то объясните, почему.)

13.35. В любую клетку квадрата 6×6 разрешается поставить желтую, красную или синюю фишку, но так, чтобы никакие две фишки разных цветов не оказались на одной вертикали или горизонтали. Выставьте наименьшее возможное количество фишек, к которым (с учетом этого запрета) нельзя было бы добавить ни одной еще.

13.36. Даны квадраты 6×6 и 8×8. На какое наименьшее общее число частей нужно их разрезать, чтобы из них можно было сложить квадрат 10×10?

13.37. Вова записал несколько многочленов, возвел каждый в квадрат и сложил результаты. В итоге он получил выражение

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2013(xy + xz + yz) + 1.$$

Коля не знает, какие именно многочлены использовал Вова, но уверен, что тот ошибся. Кто из них прав и почему?

13.38. Найдите наибольшее шестизначное число, нацело делящееся на 2013, все цифры которого различны.

13.39. *Смотри задачу* **13.33**.

7 класс

13.40. Маша хочет разложить 20 карандашей в 7 разных коробок так, чтобы количество карандашей в коробках было попарно различным. Как это сделать? (Если это невозможно, то объясните, почему.)

13.41. В любую клетку квадрата 7×7 разрешается поставить желтую, красную или синюю фишку, но так, чтобы никакие две фишки разных цветов не оказались на одной вертикали или горизонтали. Выставьте наименьшее возможное количество фишек, к которым (с учетом этого запрета) нельзя было бы добавить ни одной еще.

13.42. Даны квадраты 1×1 и 7×7. На какое наименьшее общее число частей нужно их разрезать, чтобы из них можно было сложить два квадрата 5×5?

13.43. Ян коллекционирует геометрические модели. Любые две из его моделей отличаются либо по размеру, либо по форме, либо по цвету, либо сразу по нескольким признакам. Есть модели трех размеров (мелкие, средние и крупные), причем их количества попарно различны. Есть модели четырех форм (шары, кубы, пирамиды и цилиндры), причем их количества попарно различны. Есть модели пяти цветов (желтые, синие, красные, белые, зеленые), причем их количества попарно различны. Чему равно наибольшее возможное число моделей в коллекции, удовлетворяющей этим условиям?

13.44. Найдите наибольшее семизначное число, нацело делящееся на 2013, все цифры которого различны.

13.45. *Смотри задачу* **13.33**.

8 класс

13.46. Маша хочет разложить 25 карандашей в 8 разных коробок так, чтобы количество карандашей в коробках было попарно различным. Как это сделать? (Если это невозможно, то объясните, почему.)

13.47. В любую клетку квадрата 8×8 разрешается поставить желтую, красную или синюю фишку, но так, чтобы никакие две фишки разных цветов не оказались на одной вертикали или горизонтали. Выставьте наименьшее возможное количество фишек, к которым (с учетом этого запрета) нельзя было бы добавить ни одной еще.

13.48. *Смотри задачу* **13.37**.

13.49. *Смотри задачу* **13.43**.

13.50. Марк последовательно выписывает числа 122, 122122, 122122122 и так далее. На каком шаге он запишет число, нацело делящееся на 2013?

13.51. *Смотри задачу* **13.33**.

9 класс

13.52. Пусть $T(x)$ — сумма всех простых чисел, меньших x. Найдите все корни уравнения
$$T(x) = \frac{x^2}{2}.$$

13.53. В квадрате 9×9 разрешается делать разрезы длины 1 по общей границе любых двух соседних единичных квадратиков, но так, чтобы он не распался на части. Найдите наибольшее возможное число таких разрезов. Приведите пример.

13.54. При каких значениях p оба корня уравнения $x^2 - px + 2013 = 0$ — целые?

13.55. *Смотри задачу* **13.43**.

13.56. Марк последовательно выписывает числа 61, 6161, 616161 и так далее. На каком шаге он запишет число, нацело делящееся на 2013?

13.57. На турнир приезжают 16 шахматистов, каждые два из которых должны будут сыграть одну партию между собой. Организаторы хотят провести турнир в 4 городах в течение 5 дней. Важно, чтобы ежедневно все игроки играли одинаковое число партий, и никому из них не пришлось бы переезжать в другой город в течение игрового дня. Составьте расписание турнира, удовлетворяющее этим требованиям. (Если это невозможно сделать, то объясните, почему.)

10 класс

13.58. *Смотри задачу* **13.52**.

13.59. В квадрате 10×10 разрешается делать разрезы длины 1 по общей границе любых двух соседних единичных квадратиков, но так, чтобы он не распался на части. Найдите наибольшее возможное число таких разрезов. Приведите пример.

13.60. *Смотри задачу* **13.54**.

13.61. Пусть точки Q и R делят отрезок PS на три равные части, а точки B, X, Y, Z, T служат серединами отрезков AC, AS, BR, BQ и CP соответственно. Какие значения может принимать отношение длин отрезков XT и YZ?

13.62. На какое наименьшее число частей нужно разрезать куб с ребром 6, чтобы из них можно было сложить кубы с ребрами 3, 4 и 5?

13.63. *Смотри задачу* **13.57**.

11 класс

13.64. Пусть $T(x)$ — сумма всех простых чисел, меньших x. Найдите все корни уравнения

$$T(x) = \frac{2x^2}{5}.$$

13.65. *Смотри задачу* **13.62**.

13.66. Чему равно количество таких пар чисел (A, B), после подстановки которых уравнение $x^3 + Ax^2 + Bx + 2013 = 0$ имеет три различных целых корня?

13.67. Окружности радиусов 1, 2 и 3 попарно касаются друг друга. Какие значения может принимать площадь области, граница которой состоит из дуг этих трех окружностей?

13.68. Решите уравнение

$$((x+1)^x - x)\,((x-1)^x + x) = \frac{2013}{x}.$$

13.69. *Смотри задачу* **13.57**.

12 класс[*]

[*]В некоторых странах дети учатся в школе на год дольше, чем в России, поэтому в олимпиаде «Третье Тысячелетие» вводилось отдельное условие для этого «дополнительного» класса.

13.70. Пусть $T(x)$ — сумма всех простых чисел, меньших x. Найдите все корни уравнения
$$T(x) = \frac{x^2}{4}.$$

13.71. *Смотри задачу* **13.62**.

13.72. При каких A и B уравнение $x^3 + Ax^2 + Bx + 2013 = 0$ имеет три различных целых корня?

13.73. *Смотри задачу* **13.67**.

13.74. *Смотри задачу* **13.68**.

13.75. *Смотри задачу* **13.57**.

2013–2014 год

Отборочный этап

5 класс

14.1. Назовем год *лихим*, если в записи его номера есть одинаковые цифры. Например, все годы с 1988 по 2012 были лихими. Каково максимальное количество лихих лет, идущих подряд, среди уже прошедших лет нашей эры?

14.2. На круглом торте стоит 6 свечей. Тремя разрезами торт разрезали на части, причем в каждой части оказалась ровно одна свеча. Сколько свечей могло стоять в каждой из частей, которые образовались после первого разреза? Объясните, почему никакие другие варианты невозможны.

14.3. Даны три нечетных положительных числа p, q, r. Про них известно, что $p > 2q$, $q > 2r$, $r > p - 2q$. Докажите, что $p + q + r \geqslant 25$.

14.4. У Кости есть шесть кубиков, грани которых раскрашены в шесть разных цветов (каждая грань полностью в один цвет). Все кубики раскрашены одинаково. Костя составил из кубиков столбик и смотрит на него с четырех сторон. Может ли он сделать это таким образом, чтобы с каждой стороны все шесть граней были разного цвета?

14.5. В одном доме провели перепись населения. Выяснилось, что в каждой квартире живет супружеская пара (мать и отец) и в каждой семье есть хотя бы один ребенок. У каждого мальчика в доме есть сестра, но всего мальчиков больше, чем девочек. Детей же в доме меньше, чем взрослых. Докажите, что в результаты переписи вкралась ошибка.

14.6. Фокусник хочет сложить колоду из 36 карт так, чтобы у любых двух подряд идущих карт совпадало либо достоинство, либо масть. При этом начать он хочет с пиковой дамы, а закончить бубновым тузом. Как это сделать?

6 класс

14.7. *Смотри задачу* **14.1**.

14.8. На круглом торте стоит 7 свечей. Тремя разрезами торт разрезали на части, причем в каждой части оказалась ровно одна свеча. Сколько частей было после второго разреза и сколько свечей стояло в каждой из них?

14.9. *Смотри задачу* **14.3**.

14.10. *Смотри задачу* **14.4**.

14.11. *Смотри задачу* **14.5**.

14.12. На продажу выставлены 20 книг по цене от 7 до 10 евро и 20 обложек по цене от 10 центов до 1 евро, причем все цены разные. Смогут ли Том и Леопольд купить по книге с обложкой, заплатив одну и ту же сумму денег?

7 класс

14.13. В стопке лежат одинаковые карточки, на каждой из которых записаны числа от 1 до 9. Билл взял одну карточку и тайно отметил на ней 4 числа. Марк может сделать то же самое с несколькими карточками. Затем карточки открывают. Если на одной из карточек Марка хотя бы два из четырех отмеченных чисел совпадут с числами Билла, то Марк выигрывает. Какое наименьшее число карточек должен взять Марк и как их заполнить, чтобы наверняка выиграть?

14.14. На круглом торте стоит 10 свечей. Четырьмя разрезами торт разрезали на части, причем в каждой части оказалась ровно одна свеча. Сколько свечей могло стоять в каждой из частей, которые образовались после первого разреза? Объясните, почему никакие другие варианты невозможны.

14.15. У фокусника есть два комплекта по 7 карточек. На розовых карточках записаны целые числа от 0 до 6. На первой голубой карточке написано 1, а число на каждой следующей голубой карточке в 7 раз больше предыдущего. Фокусник раскладывает карточки попарно (розовую с голубой). Затем зрители перемножают числа в каждой паре и находят сумму всех 7 произведений. Фокус состоит в том, что в сумме должно получиться простое число. Подскажите фокуснику, какие карточки можно для этого объединить в пары (или докажите, что у него ничего не получится).

14.16. *Смотри задачу* **14.4**.

14.17. По кругу в каком-то порядке выписаны числа от 1 до 77. Какова минимально возможная сумма модулей разностей между соседними числами?

14.18. *Смотри задачу* **14.12**.

8 класс

14.19. В стопке лежат одинаковые карточки, на которых записаны числа от 1 до 12. Билл взял одну карточку и тайно отметил на ней 4 числа. Марк может сделать то же самое с несколькими карточками. Затем карточки открывают. Если на одной из карточек Марка хотя бы два из четырех отмеченных чисел совпадут с числами Билла, то Марк выигрывает. Какое наименьшее число карточек должен взять Марк и как их заполнить, чтобы наверняка выиграть?

14.20. Дан прямоугольник $ABCD$. На луче DC отложен отрезок DK, равный BD. Точка M — середина отрезка BK. Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

14.21. У фокусника есть два комплекта по 8 карточек. На розовых карточках записаны целые числа от 0 до 7. На первой голубой карточке написано 1, а число на каждой следующей голубой карточке в 8 раз больше предыдущего. Фокусник раскладывает карточки попарно (розовую с голубой). Затем зрители перемножают числа в каждой паре и находят сумму всех 8 произведений. Фокус состоит в том, что в сумме должно получиться простое число. Подскажите фокуснику, какие карточки можно для этого объединить в пары (или докажите, что у него ничего не получится).

14.22. На плоскости нарисовали 5 красных точек. Все середины отрезков между ними отметили синим цветом. Расположите красные точки так, чтобы синих точек было минимально возможное количество. (Точка может оказаться красной и синей одновременно.)

14.23. По кругу в каком-то порядке выписаны числа от 1 до 88. Какова минимально возможная сумма модулей разностей между соседними числами?

14.24. *Смотри задачу* **14.12**.

9 класс

14.25. В стопке лежат одинаковые карточки, на которых записаны числа от 1 до 33. Билл взял одну карточку и тайно отметил на ней 10 чисел. Марк может сделать то же самое с несколькими карточками. Затем карточки открывают. Если на одной из карточек Марка хотя бы три из десяти отмеченных чисел совпадут с числами Билла, то Марк выигрывает. Какое наименьшее число карточек должен взять Марк и как их заполнить, чтобы наверняка выиграть?

14.26. *Смотри задачу* **14.20**.

14.27. Назовем основание системы счисления *комфортным*, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из ее цифр. Например, 3 — комфортное основание, так как троичное число 102 — простое. Найдите все комфортные основания, не превосходящие 10.

14.28. На плоскости нарисовали 5 красных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Все середины отрезков между ними отметили синим цветом. Расположите красные точки так, чтобы синих точек было минимально возможное количество.

14.29. По кругу в каком-то порядке выписаны числа от 1 до 99. Какова минимально возможная сумма модулей разностей между соседними числами?

14.30. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$$

10 класс

14.31. Назовем год *лихим*, если в записи его номера есть одинаковые цифры. Например, все годы с 1988 по 2012 были лихими. Докажите, что в каждом столетии, начиная с двадцать первого, есть хотя бы 44 лихих года.

14.32. Азимутом называется угол от 0 до 360°, отсчитанный по часовой стрелке от направления на север до направления на нужный ориентир. Алекс видит телебашню под азимутом 60°, водонапорную башню под азимутом 90°, а колокольню под азимутом 120°. Для Бориса те же азимуты соответственно равны 270°, 240° и X. Какие значения может принимать X?

14.33. Назовем основание системы счисления *комфортным*, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из ее цифр. Например, 3 — комфортное основание, так как троичное число 102 — простое. Найдите все комфортные основания, не превосходящие 12.

14.34. У Кости есть n одинаковых кубиков. У каждого кубика на двух противоположных гранях написаны числа 5 и 6, а на остальных — 1, 2, 3 и 4 (именно в этом порядке по кругу). Костя склеил из этих кубиков столбик — параллелепипед $1 \times 1 \times n$ — и покрыл лаком все шесть граней этого столбика. После этого он расклеил кубики и обнаружил, что сумма чисел на покрытых лаком гранях меньше, чем на остальных. При каком наименьшем n такое могло произойти?

14.35. CH — высота в треугольнике ABC, а O — центр его описанной окружности. Из точки C опустили перпендикуляр на AO, а его основание обозначили через T. Наконец, через M обозначили точку пересечения HT и BC. Найдите отношение длин отрезков BM и CM.

14.36. *Смотри задачу* **14.30**.

11 класс

14.37. *Смотри задачу* **14.31**.

14.38. Для исследования подводного мира соорудили прямолинейную штангу, уходящую под углом 45° к поверхности воды на глубину 100 метров. Водолаз связан со штангой гибким тросом, позволяющим ему удаляться от любой точки штанги на расстояние не более 10 метров. Считая размеры водолаза нулевыми (точечными), найдите объем доступной ему части подводного пространства. Дайте точный ответ и округлите его до ближайшего целого значения в кубических метрах.

14.39. Назовем основание системы счисления *комфортным*, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из ее цифр. Например, 3 — комфортное основание, так как троичное число 102 — простое. Найдите все комфортные основания.

14.40. *Смотри задачу* **14.34**.

14.41. *Смотри задачу* **14.35**.

14.42. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Пусть S — сумма всевозможных произведений четного (ненулевого) количества различных простых из этого набора. Докажите, что $S+1$ делится на 2^{n-2}.

Заключительный этап

5 класс

14.43. Разрежьте шахматную доску по клеточкам на две фигуры так, что в первой фигуре на 4 клетки больше, чем во второй, но во второй фигуре на 4 черных клетки больше, чем в первой. Обе фигуры должны быть связными, то есть не должны распадаться на части.

14.44. Известно, что в понедельник маляр красил вдвое медленнее, чем во вторник, среду и четверг, а в пятницу — вдвое быстрее, чем в эти три дня, но работал 6 часов вместо

8. В пятницу он покрасил на 300 метров забора больше, чем в понедельник. Сколько метров забора маляр покрасил с понедельника по пятницу?

14.45. Найдите количество четырехзначных чисел, у которых все цифры различны, первая цифра делится на 2, а сумма первой и последней цифры делится на 3.

14.46. В семье Олимпионовых принято особо отмечать день, когда человеку исполняется столько лет, какова сумма цифр его года рождения. У Коли Олимпионова такой праздник настал в 2013 году, а у Толи Олимпионова — в 2014. Кто из них старше и на сколько лет?

14.47. Карлсон купил в буфете несколько блинов (по 25 рублей за штуку) и несколько банок меда (по 340 рублей за штуку). Когда он сообщил Малышу, какую сумму потратил в буфете, тот сумел только на основании этой информации определить, сколько банок меда и сколько блинов купил Карлсон. Могла ли эта сумма превысить 2000 рублей?

14.48. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталось больше всего золота — 30 кг — и пятая часть всего серебра. Сколько золота было в кладе?

6 класс

14.49. Разрежьте шахматную доску по клеточкам на две фигуры так, чтобы в первой фигуре было на 6 клеток больше, чем во второй, но во второй фигуре было на 6 *черных* клеток больше, чем в первой. Обе фигуры должны быть связными, то есть не должны распадаться на части.

14.50. *Смотри задачу* **14.46**.

14.51. Найдите количество таких пятизначных чисел, у которых все цифры различны, первая цифра делится на 2, а сумма первой и последней цифр делится на 3.

14.52. В начале года американский доллар стоил 80 европейских центов. Эксперт дал прогноз, что в течение года курс евро по отношению к рублю вырастет на 8% (то есть за 1 евро можно будет купить на 8% рублей больше, чем в начале года), а курс доллара по отношению к рублю упадет на 10%. Если прогноз сбудется, то сколько американских центов будет стоить евро в конце года?

14.53. *Смотри задачу* **14.47**.

14.54. *Смотри задачу* **14.48**.

7 класс

14.55. Мила и Женя придумали по числу и выписали на доску все натуральные делители своих чисел. Мила написала 10 чисел, Женя выписала 9 чисел, а максимальное число, написанное на доске дважды, оказалось равно 50. Сколько всего различных чисел выписано на доске?

14.56. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник с периметром 36, стороны которого проходят по линиям сетки. Какую наибольшую площадь он может иметь?

14.57. В окружности проведены три равные хорды, проходящие через одну точку. Докажите, что эти хорды являются диаметрами.

14.58. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталось больше всего золота — 25 кг — и восьмая часть всего серебра. Сколько золота было в кладе?

14.59. Три человека хотят приехать из города A в город B, расположенный в 45 километрах от A. У них есть два велосипеда. Скорость велосипедиста равна 15 км/ч, пешехода — 5 км/ч. За какое минимальное время они смогут добраться до B, если велосипед нельзя оставлять на дороге без присмотра?

14.60. Лев взял два натуральных числа, прибавил их сумму к их произведению и в результате получил 1000. Какие числа мог взять Лев? Найдите все варианты.

8 класс

14.61. Мила и Женя придумали по числу и выписали на доску все натуральные делители своих чисел. Мила написала 10 чисел, Женя — 9, а число 6 оказалось написано дважды. Сколько всего различных чисел на доске?

14.62. *Смотри задачу* **14.57**.

14.63. Несколько братьев нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталась 1/5 всего золота и 1/7 всего серебра, а младшему — 1/7 всего золота. А какая доля общего серебра досталась младшему брату?

14.64. Три человека хотят приехать из города A в город B, расположенный в 45 километрах от A. У них есть два велосипеда. Скорость велосипедиста 15 км/ч, пешехода — 5 км/ч. За какое минимальное время они смогут добраться до B, если велосипед можно оставлять на дороге без присмотра?

14.65. *Смотри задачу* **14.47**.

14.66. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник с периметром 2014, стороны которого проходят по линиям сетки. Какую наибольшую площадь он может иметь?

9 класс

14.67. В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Для каждой пары диагоналей, пересекающихся внутри пятиугольника, нашли меньший из углов между ними. Какие значения может принимать сумма этих пяти углов?

14.68. *Смотри задачу* **14.61**.

14.69. *Смотри задачу* **14.63**.

14.70. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать три части, из которых можно составить прямоугольник $1 \times 2{,}4$. Части можно поворачивать и переворачивать.

14.71. Пусть a и n — натуральные числа, причем известно, что a^n — 2014-значное число. Найдите наименьшее натуральное k такое, что a не может быть k-значным числом.

14.72. Павел придумал новый способ сложения чисел — он называет «павлосуммой» чисел x и y значение выражения

$$x \oplus y = \frac{x+y}{1-xy},$$

если оно определено. Однажды он «сложил» своим способом числа a и b и «прибавил» к ним c, а друга попросил «сложить» числа b и c и «прибавить» к ним a. Могли ли у них получиться разные результаты?

10 класс

14.73. *Смотри задачу* **14.67**.

14.74. Пусть $f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 24$. Решите уравнение $f(f(f(f(x)))) = 0$.

14.75. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать четыре части, из которых можно составить прямоугольник $1 \times 2{,}5$. Части можно поворачивать и переворачивать.

14.76. Внутри квадрата со стороной 100 нарисовали 100 000 квадратов. Диагонали разных квадратов не имеют общих точек. Докажите, что сторона хотя бы одного квадрата меньше 1.

14.77. *Смотри задачу* **14.71**.

14.78. Павел придумал новый способ сложения чисел — он называет «павлосуммой» чисел x и y значение выражения
$$x \oplus y = \frac{x+y}{1-xy},$$
если оно определено. Однажды он «сложил» своим способом числа a и b, «прибавил» к ним c, а к результату — d. В то же время его друг «сложил» числа c и d, «прибавил» к ним b, а к результату — a. Могли ли у них получиться разные результаты?

11 класс

14.79. *Смотри задачу* **14.67**.

14.80. *Смотри задачу* **14.74**.

14.81. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать пять частей, из которых можно составить прямоугольник $1\times 2{,}7$. Части можно поворачивать и переворачивать.

14.82. Существует ли треугольная пирамида, у которой высота равна 60, высота каждой боковой грани, проведенная к стороне основания, равна 61, а периметр основания равен 62?

14.83. *Смотри задачу* **14.71**.

14.84. Павел придумал новый способ сложения чисел — он называет «павлосуммой» чисел a и b значение выражения
$$a \oplus b = \frac{a+b}{1-ab},$$
если оно определено. Как и в обычной арифметике, умножение на натуральное число Павел понимает как сложение соответствующего числа одинаковых слагаемых:
$$a \otimes b = ((a \oplus a) \oplus a) \oplus \ldots) \oplus a \text{ (здесь } b \text{ «слагаемых»).}$$
Существуют ли в арифметике Павла такие неравные натуральные числа x и y, для которых равны «произведения» $x \otimes y$ и $y \otimes x$?

2014–2015 год

Отборочный этап

5 класс

15.1. Назовем *тяжелым* месяц, в котором пять понедельников. Сколько тяжелых месяцев может быть в течение года?

15.2. Андрей перемножил две последовательные цифры и получил в итоге двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами. Найдите все такие примеры.

15.3. Саша зачеркнул на 25-й странице учебника все слова, в которых нет буквы А, потом он зачеркнул все слова, в которых нет буквы Б, а потом он нашел все слова, где есть и буква О, и буква А, и тоже зачеркнул их. Костя на той же странице своего учебника зачеркнул слова, где нет Б, но есть А или О (возможно, обе сразу), и после этого он зачеркнул все слова, где нет ни буквы А, ни буквы О. Могло ли у Саши остаться незачеркнутыми больше слов, чем у Кости?

15.4. В каждом из двух классов по 30 учеников. Мальчиков в первом классе вдвое больше, чем во втором, а девочек — втрое меньше, чем во втором. Сколько мальчиков и девочек в каждом классе?

15.5. Три ручки, четыре карандаша и линейка вместе стоят 26 рублей, а пять ручек, шесть карандашей и три линейки — 44 рубля. Сколько стоят вместе две ручки и три карандаша?

15.6. Первоначально на доске написано число 1. Разрешается любое написанное на доске число умножить на 3 или переставить в нем цифры. Можно ли таким образом получить 999?

6 класс

15.7. *Смотри задачу* **15.1**.

15.8. *Смотри задачу* **15.2**.

15.9. *Смотри задачу* **15.3**.

15.10. *Смотри задачу* **15.4**.

15.11. *Смотри задачу* **15.5**.

15.12. Первоначально на доске написано число 1. Разрешается любое написанное на доске число умножить на 2 или переставить в нем цифры. Можно ли таким образом получить 209?

7 класс

15.13. *Смотри задачу* **15.1**.

15.14. *Смотри задачу* **15.2**.

15.15. Сумма трех натуральных чисел равна 100. Какое наименьшее возможное значение может принимать НОК этих чисел?

15.16. Докажите, что при любой расстановке чисел 1, 2, ..., 10 по кругу найдутся три соседних числа с суммой не менее 18.

15.17. *Смотри задачу* **15.5**.

15.18. Найдите наименьшее натуральное число, которое начинается на 11, заканчивается на 11 и делится на 7. Объясните, почему это число является наименьшим из удовлетворяющих условию.

8 класс

15.19. Докажите, что для любого $n > 3$ существует n-угольник, у которого никакие две диагонали не параллельны.

15.20. BK — биссектриса треугольника ABC. Известно, что $AB = AC$, а $BC = AK + BK$. Найдите углы треугольника ABC.

15.21. Каждый из трех землекопов, работая в одиночку, может вырыть траншею за целое число дней. А если ту же траншею они будут рыть все втроем, на это у них уйдет соответственно на 2, 5 и 10 дней меньше, чем при рытье вдвоем (то есть без первого, второго и третьего соответственно). За сколько дней может выкопать траншею самый медленный из них?

15.22. Даны 15 составных чисел, не превосходящих 2014. Докажите, что какие-то два из них имеют общий делитель, больший 1.

15.23. Дан квадрат 100×100 без угловой клетки. Можно ли разрезать его по клеткам на 33 фигуры, у которых одинаковые площади и одинаковые периметры?

15.24. В шестизначном числе поставили знак умножения после первых трех цифр, и оказалось, что произведение двух полученных трехзначных чисел в 7 раз меньше исходного числа. Какое число было написано?

15.25. Есть набор из N^2 карточек, на каждой карточке с одной стороны написано число, с другой стороны пусто. Написанные числа попарно различны. Эти карточки выложены в виде квадрата $N \times N$ пустой стороной (рубашкой) вверх. Разрешается перевернуть любую карточку и тем самым узнать написанное на ней число. Докажите, что не более чем за $8N$ переворачиваний можно найти карточку, число на которой меньше, чем число на каждой из соседних с ней (по стороне) карточек.

15.26. Назовем натуральное число *возрастающим*, если цифры в его записи идут в порядке строгого возрастания (например, числа 7 и 1589 — возрастающие, а 2447 — нет). Какое наименьшее количество возрастающих чисел надо сложить, чтобы получить 2014?

15.27. Найдите все натуральные a, b и c, для которых
$$2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014.$$

15.28. В треугольнике ABC углы B и C равны 30° и 105°, а P — середина стороны BC. Найдите угол BAP.

9 класс

15.29. *Смотри задачу* **15.19**.

15.30. *Смотри задачу* **15.15**.

15.31. *Смотри задачу* **15.21**.

15.32. Андрей перемножил два последовательных натуральных числа и получил в некоторой системе счисления двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами, не превосходящими 9. Найдите эти цифры.

15.33. Дан квадрат 100×100 без угловой клетки. Можно ли разрезать его на 33 фигуры, у которых одинаковые площади и одинаковые периметры?

15.34. *Смотри задачу* **15.27**.

15.35. В таблице 30×30 клеток поставлено 162 плюса и 144 минуса (в каждой клетке не более одного знака) так, что в каждой строке и каждом столбце таблицы стоит не более 17 знаков. Для каждого плюса подсчитали, сколько минусов находится в той же строке. Для каждого минуса подсчитали, сколько плюсов находится в том же столбце. Какое наибольшее значение может иметь сумма найденных чисел?

15.36. В треугольнике ABC выбрана точка D на стороне AB так, что углы ACD и ABC равны. Пусть S — центр описанной окружности треугольника BCD. Докажите, что точки A, C, S и середина BD лежат на одной окружности.

15.37. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\sin A = \cos A_1$, $\sin B = \cos B_1$, $\sin C = \cos C_1$. Какие значения может принимать наибольший из шести углов?

15.38. Пусть H — такая точка внутри треугольника ABC, что $\angle HAB = \angle HCB$ и $\angle HBC = \angle HAC$. Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC.

10 класс

15.39. Выберите на каждой стороне квадрата по одной точке так, чтобы образованный ими четырехугольник имел наименьший периметр.

15.40. *Смотри задачу* **15.21**.

15.41. *Смотри задачу* **15.32**.

15.42. Костя выписал на доску 30 последовательных членов арифметической прогрессии с разностью 2061. Докажите, что в ней содержится не более 20 точных квадратов.

15.43. Вещественные числа x и y таковы, что
$$x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leqslant 0.$$
Докажите, что $x \geqslant -1/6$.

15.44. Решите систему уравнений в целых числах:
$$\begin{cases} 2^a + 3^b = 5^b \\ 3^a + 6^b = 9^b \end{cases}$$

15.45. Маша красит клетки белой доски 10×10. Она может покрасить любой вертикальный ряд клеток синей краской или любой горизонтальный ряд красной краской (каждый ряд красят не более одного раза). Если синяя краска ложится поверх красной, получается синяя клетка, а если красная поверх синей, то краски вступают в реакцию и обесцвечиваются, получается белая клетка. Может ли на доске оказаться 33 красных клетки?

15.46. *Смотри задачу* **15.36**.

15.47. *Смотри задачу* **15.37**.

15.48. Решите уравнение в простых числах:
$$100q + 80 = p^3 + pq^2.$$

11 класс

15.49. *Смотри задачу* **15.21**.

15.50. *Смотри задачу* **15.32**.

15.51. *Смотри задачу* **15.42**.

15.52. *Смотри задачу* **15.43**.

15.53. *Смотри задачу* **15.45**.

15.54. Можно ли утверждать, что
$$\log_{\sqrt{a}}(a+1) + \log_{a+1}\sqrt{a} \geqslant \sqrt{6}$$
при $a > 1$?

15.55. Докажите, что количество способов разрезать прямоугольник 200×3 на домино (прямоугольники 1×2) делится на 3.

15.56. Случайным образом выбираются три числа от 1 до N (возможно, совпадающие) и располагаются в порядке возрастания. С какой вероятностью они образуют арифметическую прогрессию?

15.57. *Смотри задачу* **15.37**.

15.58. Пусть $d(k)$ — число делителей натурального числа k, а квадратные скобки означают целую часть вещественного числа. Докажите, что числа $d(1)+d(2)+\ldots+d(n)$ и $[\sqrt{n}]$ имеют одинаковую четность.

Заключительный этап

5 класс

15.59. В некотором языке есть 3 гласных и 5 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых двух слогов. Сколько слов в этом языке?

15.60. Приведите пример таких целых чисел a и b, что
$$ab(2a+b) = 2015.$$

15.61. Маша с Леной вышли из дома и пошли в магазин за мороженым. Маша шла быстрее и дошла до магазина за 12 минут. Потратив 2 минуты на покупку мороженого, она пошла назад и встретила Лену еще через 2 минуты. Сколько времени потребовалось Лене, чтобы дойти до магазина? Скорости девочек постоянны.

15.62. Шестеро школьников решили посадить в школьном дворе 5 деревьев. Известно, что каждое дерево сажало разное число школьников и каждый школьник участвовал в посадке одинакового количества деревьев. Могло ли так случиться?

15.63. В плоском мире есть два прямоугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удаленная от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что площадь первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

15.64. Аня, Галя, Даша, Соня и Лена приехали в лагерь «Формула Единства» из разных городов: Курска, Вологды, Новороссийска, Петрозаводска и Чебоксар. Знакомясь с другими членами отряда, они рассказали о себе следующее:

- Соня и Даша никогда не были в Курске;

• Галя и Соня были вместе в прошлом лагере с девочкой из Новороссийска;

• Аня и Соня подарили девочке из Чебоксар по сувенирчику;

• Галя и Соня помогли девочке из Вологды занести вещи в комнату;

• Галя и Лена общаются по скайпу с девочкой из Чебоксар, а девочка из Новороссийска переписывается в контакте с Аней. Кто где живет?

6 класс

15.65. В некотором языке есть 5 гласных и 7 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых двух слогов. Сколько слов в этом языке?

15.66. *Смотри задачу* **15.60**.

15.67. На столе лежат три конфеты. У Ани и Лены есть мешок с неограниченным количеством конфет, и они играют в игру. Каждая из них своим ходом добавляет некоторое количество конфет из мешка на стол, но при этом не может положить больше конфет, чем уже лежит на столе. Девочки ходят по очереди, начинает Аня. Выигрывает та, после хода которой на столе окажется ровно 2015 конфет. Кто из девочек может обеспечить себе победу, как бы ни играла соперница?

15.68. *Смотри задачу* **15.62**.

15.69. В плоском мире есть два прямоугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удаленная от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

15.70. Дима варит кашу. Чтобы каша получилась вкусной, ему нужно варить крупу ровно 24 минуты. Обычных часов у Димы нет, но есть двое песочных часов: одни — на 20 минут, другие — на 7 минут. Как Диме точно отмерить требуемое время?

7 класс

15.71. В некотором языке есть 3 гласных и 7 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых трех слогов. Слово называется забавным, если в нем встречаются две одинаковые буквы подряд. Сколько забавных слов в этом языке?

15.72. Приведите пример таких целых чисел a и b, что
$$(10a + b)(a + 10b)(a + b + 1) = 2015.$$

15.73. В равнобедренном треугольнике ABC (какие две из сторон треугольника равны, неизвестно) проведены медианы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Известно, что $\angle AOB = 120^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

15.74. По вновь придуманным правилам в каждом математическом бою участвуют одновременно 3 команды. Организаторы хотят провести турнир из нескольких (более одного) боев так, чтобы каждые две команды встречались между собой ровно один раз. Какое наименьшее число команд нужно для этого пригласить?

15.75. В плоском мире есть два треугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удаленная от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметры этих островов одинаковы, а площадь прибрежных вод у них различается? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

15.76. На плоскости нарисован 2015-угольник со всеми диагоналями. Дима с Сашей играют в следующую игру. Они поочередно стирают либо от 1 до 10 соседних сторон нарисованного многоугольника, либо от 1 до 9 его диагоналей. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Первым ходит Дима. Кто из играющих может обеспечить себе победу при любой игре соперника? Как он сможет это сделать?

8 класс

15.77. В некотором языке есть 3 гласных и 8 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых трех слогов. Слово называется забавным, если в нем встречаются две одинаковые буквы подряд. Сколько забавных слов в этом языке?

15.78. Один из концов отрезка закрасили в синий цвет, а другой — в красный. Внутри отрезка выбрали 2015 точек и каждую из них произвольным образом закрасили в какой-то из этих же цветов. В результате отрезок разбился на 2016 частей. Может ли количество таких частей, у которых оба конца красные, равняться количеству частей, у которых оба конца синие?

15.79. *Смотри задачу* **15.73**.

15.80. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что
$$2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d.$$
Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?

15.81. В плоском мире есть два треугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удаленная от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

15.82. Марк задумал число m и нашел число k диагоналей у выпуклого m-угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m. Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k-угольника. Их оказалось 2015. Найдите m.

9 класс

15.83. *Смотри задачу* **15.80**.

15.84. *Смотри задачу* **15.78**.

15.85. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ выбраны соответственно такие точки M и P, что $AM = CP$. Окружность на диаметре DP пересекает отрезок CM в точке K. Докажите, что MK и BK перпендикулярны.

15.86. Даны 10 последовательных целых чисел, превосходящих 1. Каждое из них разложили на простые множители, а через p обозначили наибольший из всех множителей. Какое наименьшее значение может принимать p?

15.87. В плоском мире есть два острова, которые имеют форму выпуклых многоугольников. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удаленная от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

15.88. *Смотри задачу* **15.82**.

10 класс

15.89. *Смотри задачу* **15.80**.

15.90. Сколько пятизначных чисел делятся на свою последнюю цифру?

15.91. Точки H, K и M лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, в котором AH является высотой. Докажите, что AH служит биссектрисой угла KHM тогда и только тогда, когда AH, BK и CM пересекаются в одной точке.

15.92. *Смотри задачу* **15.86**.

15.93. *Смотри задачу* **15.87**.

15.94. *Смотри задачу* **15.82**.

11 класс

15.95. *Смотри задачу* **15.80**.

15.96. *Смотри задачу* **15.90**.

15.97. *Смотри задачу* **15.91**.

15.98. *Смотри задачу* **15.86**.

15.99. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 1. Через точку M, лежащую на грани ABC (но не на ребре), проведены плоскости, параллельные трем другим граням. Эти плоскости делят тетраэдр на части. Найдите сумму длин ребер той части, которая содержит точку D.

15.100. *Смотри задачу* **15.82**.

2015–2016 год

Отборочный этап

5 класс

16.1. Петя, Вася и Толик в складчину купили футбольный мяч. Известно, что каждый из них заплатил не больше половины суммы, заплаченной двумя другими. Мяч стоил 9 рублей. Сколько денег заплатил Петя?

16.2. Полина написала на доске два числа A и B. Вика их стерла, записав числа C и D, равные сумме и произведению чисел, записанных Полиной. Затем Полина стерла числа, записанные Викой, также записав их сумму и произведение — E и F. Из последних двух чисел одно оказалось нечетным. Какое именно и почему?

16.3. Считается, что ученик A учится лучше ученика B, если в большинстве контрольных работ оценка у ученика A выше, чем у ученика B. В классе провели три контрольные работы. Могло ли оказаться, что ученик A учится лучше, чем ученик B, ученик B — лучше, чем ученик C, а ученик C — лучше, чем ученик A?

16.4. По вечерам Лева врет маме, если в этот день получил двойку, а в остальных случаях говорит правду. А еще у Левы есть сестра, которой мама дает конфеты в те дни, когда она не получает двоек. Однажды вечером Лева сказал маме: «Сегодня я получил больше двоек, чем моя сестра». Достанутся ли сестре конфеты?

16.5. Волшебный календарь показывает правильную дату по четным числам месяца и неправильную по нечетным. Какое максимальное количество дней подряд он может показывать одну и ту же дату? Укажите все возможные числа месяца, которые он при этом может показывать.

16.6. Сколько существует десятизначных чисел, в которых нет повторяющихся цифр, а цифры $0, 1, 2, 3$ стоят подряд в порядке возрастания?

16.7. Алексей разрезал квадрат 8×8 по границам клеток на 7 частей с равными периметрами. Покажите, как он это сделал (достаточно привести один пример).

6 класс

16.8. По кругу сидят 14 человек. Петя, Вика, Толик и Чингиз сидят подряд, у каждого из них есть по монете: у Пети 1 рубль, у Вики 2 рубля, у Толика 5 рублей, а у Чингиза 10 рублей. У других ребят денег нет. Любой человек из сидящих в кругу может передать свою монету другому, если между ними сидят ровно три человека. Оказалось, что через некоторое время монеты опять оказались у Пети, Вики, Толика и Чингиза. У кого теперь какая монета?

16.9. *Смотри задачу* **16.2**.

16.10. *Смотри задачу* **16.3**.

16.11. *Смотри задачу* **16.4**.

16.12. *Смотри задачу* **16.5**.

16.13. Сколько существует десятизначных чисел, в которых нет повторяющихся цифр, а цифры $0, 1, 2, 3$ стоят подряд в порядке возрастания или в порядке убывания?

16.14. *Смотри задачу* **16.7**.

7 класс

16.15. *Смотри задачу* **16.5**.

16.16. Расставьте в клетках квадрата 5×5 различные натуральные числа так, чтобы их суммы в каждой строке и каждом столбце были равны между собой и (при этом условии) как можно меньшими. На одной из диагоналей уже стоят числа $1, 2, 3, 4$ и 2015 (повторно их использовать нельзя).

16.17. *Смотри задачу* **16.7**.

16.18. В тараканьих бегах участвуют 27 тараканов. В каждом забеге бегут три таракана. Скорости всех тараканов различны и постоянны в течение всех забегов. После каждого забега мы узнаем, в каком порядке его участники пришли к финишу.

Мы хотели бы узнать двух самых быстрых тараканов (в правильном порядке). Хватит ли для этого 14 забегов?

16.19. Считается, что ученик A учится лучше ученика B, если в большинстве контрольных работ оценка у ученика A выше, чем у ученика B. В классе провели несколько работ (больше трех). Может ли по их результатам оказаться, что ученик A учится лучше, чем ученик B, ученик B — лучше, чем ученик C, а ученик C — лучше, чем ученик A?

16.20. Натуральное число называется *красивым*, если оно равно произведению факториалов простых чисел (не обязательно различных). Положительное рациональное число называется *практичным*, если оно равно отношению двух красивых натуральных чисел. Докажите, что любое положительное рациональное число — практичное.

16.21. Назовем натуральное число *возрастающим*, если его цифры идут в порядке строгого возрастания (например, 1589 — возрастающее, а 447 — нет). Какое наименьшее количество возрастающих чисел надо сложить, чтобы получить 2015?

8 класс

16.22. *Смотри задачу* **16.16**.

16.23. *Смотри задачу* **16.18**.

16.24. Найдите хотя бы одно натуральное число, произведение натуральных делителей которого равно 10^{90}.

16.25. У Васи есть 12 палочек, длина каждой из которых — натуральное число, не превосходящее 56. Докажите, что из каких-то трех палочек можно сложить треугольник.

16.26. *Смотри задачу* **16.20**.

16.27. В треугольнике ABC угол B равен 30°, а угол C равен 105°. Точка D — середина стороны BC. Найдите угол BAD.

16.28. *Смотри задачу* **16.19**.

9 класс

16.29. Вершины правильного 12-угольника покрашены в красный и синий цвета. Известно, что если выбрать любые три вершины, образующие равносторонний треугольник, то как минимум две из них будут окрашены в красный цвет. Докажите, что найдется квадрат, как минимум три вершины которого красные.

16.30. *Смотри задачу* **16.20**.

16.31. *Смотри задачу* **16.18**.

16.32. *Смотри задачу* **16.27**.

16.33. *Смотри задачу* **16.25**.

16.34. *Смотри задачу* **16.24**.

16.35. Хорошо известно, что $3^2 + 4^2 = 5^2$. Менее известно, что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. А существует ли 2015 последовательных натуральных чисел, таких что сумма квадратов первых 1008 из них равна сумме квадратов последних 1007?

10 класс

16.36. Багз Банни и Кролик Роджер поспорили, кто из них быстрее прыгает. Чтобы выяснить это, они решили провести соревнование: каждый должен прыжками преодолеть 50-метровую дистанцию, затем развернуться и вернуться к месту старта. Известно, что Багз Банни прыгает на 50 см, а Роджер на 60 см, но за то время, за которое Багз делает 6 прыжков, Роджер делает 5. Кто же из кроликов финиширует первым?

16.37. При каких n можно разрезать квадрат на n подобных прямоугольников, не все из которых равны?

16.38. Существуют ли такие натуральные числа a и b, что
$$\text{НОК}\,(a, b) = \text{НОК}\,(a + 2015, b + 2016)?$$

16.39. *Смотри задачу* **16.27**.

16.40. Расставьте в клетках квадрата 10×10 различные натуральные числа так, чтобы их суммы в каждой строке и каждом столбце были равны между собой и (при этом условии) как можно меньшими. На одной из диагоналей уже стоят числа $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ и 2015 (повторно их использовать нельзя).

16.41. Вписанная окружность касается сторон AB, BC и AC треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите неравенство:

$$\frac{AC}{AB_1} + \frac{CB}{CA_1} + \frac{BA}{BC_1} > 4.$$

16.42. Хорошо известно, что $3^2 + 4^2 = 5^2$. Менее известно, что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. А для любого ли натурального k существуют $2k+1$ последовательных натуральных чисел таких, что сумма квадратов первых $k+1$ из них равна сумме квадратов последних k?

11 класс

16.43. *Смотри задачу* **16.36**.

16.44. *Смотри задачу* **16.37**.

16.45. *Смотри задачу* **16.38**.

16.46. *Смотри задачу* **16.27**.

16.47. В каждой целочисленной точке плоскости растет дерево диаметром 10^{-6}. Дровосек срубил дерево, стоящее в точке $(0, 0)$, и встал в центр пенька. Ограничена ли часть плоскости, которую он сумеет увидеть? Считайте каждое дерево бесконечной цилиндрической колонной, ось симметрии которой проходит через целочисленную точку плоскости.

16.48. Приведите пример четырех положительных чисел, которые не могут служить радиусами четырех попарно касающихся сфер.

16.49. *Смотри задачу* **16.42**.

Заключительный этап

5 класс

16.50. Придумайте пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 1000.

16.51. Каждая клетка доски 10×10 покрашена в синий или белый цвет. Назовем клетку *радостной*, если ровно две соседних с ней клетки синие. Закрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными. (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

16.52. Вот задача из задачника С. А. Рачинского (конец XIX века): «Сколько досок длиною в 6 аршин, шириною в 6 вершков нужно, чтобы замостить пол в квадратной комнате, коей сторона — 12 аршин?» Ответ к задаче — 64 доски. Установите по этим данным, сколько вершков в аршине.

16.53. На поляне на расстоянии 20 метров одна от другой растут две ели высотой по 30 метров. Ветки елей растут очень густо и среди них есть направленные точно навстречу друг другу, а длина каждой ветки вдвое меньше расстояния от нее до вершины. Паук может ползти по стволу (вверх или вниз строго по вертикали), по веткам (строго по горизонтали), либо спускаться вертикально вниз по паутине с одной ветки на другую. Какое наименьшее расстояние ему придется проползти, чтобы добраться с вершины одной ели на вершину другой?

16.54. У Никиты есть волшебная банка. Если в банку положить n конфет и закрыть на час, то количество лежащих в ней конфет увеличится на сумму цифр числа n. Например, если было 137 конфет, то станет $137 + 1 + 3 + 7 = 148$. Какое максимальное количество конфет Никита может получить за 20 часов 16 минут, если вначале у него одна конфета?

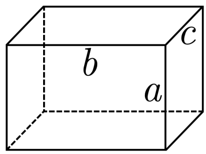
6 класс

16.55. *Смотри задачу* **16.51**.

16.56. *Смотри задачу* **16.52**.

16.57. *Смотри задачу* **16.54**.

16.58. Назовем *типичным* любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота, на рисунке обозначенные a, b и c) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.



16.59. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.

7 класс

16.60. *Смотри задачу* **16.50**.

16.61. На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если первый прямоугольник содержит 2015 клеток, а второй — 2016.

16.62. *Смотри задачу* **16.58**.

16.63. *Смотри задачу* **16.59**.

16.64. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовем клетку *равновесной*, если среди ее соседей поровну синих и белых. Для каких n можно раскрасить доску так, чтобы на ней было ровно n равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

8 класс

16.65. Существуют ли три таких различных цифры A, B и C, что $\overline{ABC}$, $\overline{CBA}$, $\overline{CAB}$ — квадраты натуральных чисел?

16.66. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовем клетку *равновесной*, если среди ее соседей поровну синих и белых. Какое максимальное количество равновесных клеток может оказаться на доске? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

16.67. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причем $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O, причем $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.

16.68. На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если каждый прямоугольник содержит больше 2010, но меньше 2020 клеток.

16.69. В игре «сет» участвуют всевозможные четырехзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвертом — все три цифры). А числа 1123, 2231, 3311 не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
Сколько всего сетов существует в игре?
Примечание: перестановка чисел не приводит к образованию нового сета, например, 1232, 2213, 3221 и 2213, 1232, 3221 — один и тот же сет.

9 класс

16.70. Найдите все такие числа k, для которых

$$\left(\frac{k}{2}\right)! \cdot \frac{k}{4} = 2016 + k^2.$$

16.71. *Смотри задачу* **16.67**.

16.72. *Смотри задачу* **16.59**.

16.73. На координатной плоскости нарисовали равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = 2016$, $BC = AC = 1533$, а вершины A и B лежат в узлах на одной горизонтали. Определите, сколько узлов лежит в треугольнике ABC (включая узлы, лежащие на сторонах).

Примечание: Узлом называется точка координатной плоскости, у которой обе координаты целые.

16.74. На плоскости расположено 100 прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям. Каждый пересекается хотя бы с 90 другими. Докажите, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми.

10 класс

16.75. В некотором треугольнике сумма тангенсов углов оказалась равна 2016. Оцените (хотя бы с точностью до 1 градуса) величину наибольшего из его углов.

16.76. *Смотри задачу* **16.58**.

16.77. Найдите все натуральные числа n, для которых $2^n + n^{2016}$ — простое число.

16.78. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ внутри треугольника ADC выбрана точка E, причем $\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$, $\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$, $\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$. Докажите, что $\triangle BEC$ равносторонний.

16.79. В игре «сет» участвуют всевозможные четырехзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному

разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
Сложностью сета будем называть количество таких разрядов, где все три цифры различны.
Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет сложности 3 (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвертом — все три цифры); числа 1231, 1232, 1233 — сет сложности 1 (в первых трех разрядах цифры совпадают, и только в четвертом все цифры различны). А числа 1123, 2231, 3311 вообще не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
Сетов какой сложности в игре больше всего и почему?

11 класс

16.80. Каждая клетка доски 1000×1000 покрашена в синий или белый цвет. Назовем клетку *равновесной*, если среди ее соседей поровну синих и белых. Можно ли раскрасить доску так, чтобы на ней было более 600 000 синих равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

16.81. *Смотри задачу* **16.77**.

16.82. В трехмерном пространстве задана стандартная система координат. Найдите площадь множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ |x - y| < 1 \\ |y - z| < 1 \end{cases}$$

16.83. *Смотри задачу* **16.78**.

16.84. *Смотри задачу* **16.79**.