Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2015/2016 рік. Перший тур

Задачі для 5 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. Петя, Вася і Толя скинулися грішми на футбольний м'яч. Відомо, що кожен з них сплатив не більше половини суми, внесеної двома іншими. М'яч коштував 9 гривень. Скільки грошей сплатив Петя?

2. Поліна написала на дошці два числа A та B. Віка витерла їх, написавши числа C та D, що дорівнюють сумі та добутку чисел A та B. Потім Поліна витерла ці числа, також записавши їхню суму та добуток: E та F. З останніх двох чисел одне виявилося непарним. Яке саме і чому?

3. Вважають, що учень A вчиться краще за учня B, якщо в більшості контрольних робіт оцінка учня A вища, ніж в учня B. У класі провели три контрольні роботи. Чи могло статися так, що учень A вчиться краще за учня B, учень B краще за учня C, а учень C краще за A?

4. Вечорами Левко бреше мамі, якщо в цей день він отримав двійку; у решті випадків він каже правду. Ще у Левка є сестра, якій мама дає цукерки в ті дні, коли та не має двійок. Одним вечором Левко сказав мамі: «Сьогодні я отримав більше двійок, ніж моя сестра». Чи отримає його сестра цукерки?

5. Чарівний календар показує правильну дату в парні числа місяця та неправильну в непарні. Яку максимальну кількість днів поспіль він може показувати одну й ту саму дату? Укажіть усі можливі числа місяця, які він може при цьому показувати.

6. Скільки існує десятизначних чисел, у яких усі цифри різні, а цифри 0, 1, 2, 3 стоять поспіль у порядку зростання?

7. Олексій розрізав квадрат 8×8 клітинок вздовж межі клітинок на сім частин з однаковими периметрами. Покажіть, як він міг це зробити (достатньо одного прикладу).

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2015/2016 рік. Перший тур

Задачі для 6 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. По колу сидять 14 дітей. Петя, Віка, Толя та Чингіз сидять поспіль, кожен з них має монету: Петя 1 копійку, Віка 2 копійки, Толя 5 копійок, Чингіз 10 копійок. Інші діти не мають грошей. Будь-хто з дітей, що сидять по колу, може передати монету іншій дитині, якщо між ними сидить рівно троє дітей. Виявилося, що через деякий час монети знов опинилися в Петі, Віки, Толі та Чингіза. Хто тепер має яку монету? Знайдіть усі варіанти та доведіть, що інші неможливі.

2. Поліна написала на дошці два числа A та B. Віка витерла їх, написавши числа C та D, що дорівнюють сумі та добутку чисел A та B. Потім Поліна витерла ці числа, також записавши їхню суму та добуток: E та F. З останніх двох чисел одне виявилося непарним. Яке саме і чому?

3. Вважають, що учень A вчиться краще за учня B, якщо в більшості контрольних робіт оцінка учня A вища, ніж в учня B. У класі провели три контрольні роботи. Чи могло статися так, що учень A вчиться краще за учня B, учень B краще за учня C, а учень C краще за A?

4. Вечорами Левко бреше мамі, якщо в цей день він отримав двійку; у решті випадків він каже правду. Ще у Левка є сестра, якій мама дає цукерки в ті дні, коли та не має двійок. Одним вечором Левко сказав мамі: «Сьогодні я отримав більше двійок, ніж моя сестра». Чи отримає його сестра цукерки?

5. Чарівний календар показує правильну дату в парні числа місяця та неправильну в непарні. Яку максимальну кількість днів поспіль він може показувати одну й ту саму дату? Укажіть усі можливі числа місяця, які він може при цьому показувати.

6. Скільки існує десятизначних чисел, у яких усі цифри різні, а цифри 0, 1, 2, 3 стоять поспіль у порядку зростання або у порядку спадання?

7. Олексій розрізав квадрат 8×8 клітинок вздовж межі клітинок на сім частин з однаковими периметрами. Покажіть, як він міг це зробити (достатньо одного прикладу).

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2015/2016 рік. Перший тур

Задачі для 7 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. Чарівний календар показує правильну дату в парні числа місяця та неправильну в непарні. Яку максимальну кількість днів поспіль він може показувати одну й ту саму дату? Укажіть усі можливі числа місяця, які він може при цьому показувати.

2. Розставте в клітинках квадрата 5×5 різні натуральні числа так, щоб їхні суми в кожному рядку та кожному стовпчику були однаковими та (за цієї умови) якомога меншими. На одній з діагоналей вже стоять числа 1, 2, 3, 4 і 2015 (які не можна використовувати вдруге).

3. Олексій розрізав квадрат 8×8 клітинок вздовж межі клітинок на сім частин з однаковими периметрами. Покажіть, як він міг це зробити (достатньо одного прикладу).

4. У тарганячих гонах беруть участь 27 тарганів. У кожному забігу змагаються три таргани. Швидкості всіх тарганів різні та постійні протягом усіх забігів. Після кожного забігу нам повідомлюють, у якому порядку фінішували його учасники. Нам хотілося б дізнатися, який з тарганів є найшвидшим і який є другим за швидкістю. Чи вистачить для цього 14 забігів?

5. Вважають, що учень A вчиться краще за учня B, якщо в більшості контрольних робіт оцінка учня A вища, ніж в учня B. Чи може після написання більше трьох контрольних робіт виявитися, що учень A вчиться краще за учня B, учень B краще за учня C, а учень C краще за A?

6. Натуральне число назвемо *красивим*, якщо воно дорівнює добутку факторіалів простих чисел (не обов'язково різних). Додатне раціональне число назвемо *практичним*, якщо воно дорівнює відношенню двох красивих натуральних чисел. Доведіть, що довільне додатне раціональне число є практичним.

7. Назвемо натуральне число *ростучим*, якщо його цифри йдуть у порядку строгого зростання (наприклад, число 1589 ростуче, а 447 ні). Яку найменшу кількість ростучих чисел слід додати, щоб одержати в сумі 2015?

Міжнародна математична олімпіада «Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2015/2016 рік. Перший тур

Задачі для 8 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. Розставте в клітинках квадрата 5×5 різні натуральні числа так, щоб їхні суми в кожному рядку та кожному стовпчику були однаковими та (за цієї умови) якомога меншими. На одній з діагоналей вже стоять числа 1, 2, 3, 4 і 2015 (які не можна використовувати вдруге).

2. У тарганячих гонах беруть участь 27 тарганів. У кожному забігу змагаються три таргани. Швидкості всіх тарганів різні та постійні протягом усіх забігів. Після кожного забігу нам повідомлюють, у якому порядку фінішували його учасники. Нам хотілося б дізнатися, який з тарганів є найшвидшим і який є другим за швидкістю. Чи вистачить для цього 14 забігів?

3. Знайдіть хоча б одне натуральне число, добуток натуральних дільників якого дорівнює 10^{90}.

4. У Васі є 12 паличок, довжина кожної з яких є натуральним числом, що не перевищує 56. Доведіть, що з якихось трьох паличок можна скласти трикутник.

5. Натуральне число назвемо *красивим*, якщо воно дорівнює добутку факторіалів простих чисел (не обов'язково різних). Додатне раціональне число назвемо *практичним*, якщо воно дорівнює відношенню двох красивих натуральних чисел. Доведіть, що довільне додатне раціональне число є практичним.

6. У трикутнику ABC кут B рівний $30°$, а кут C рівний $105°$. Точка D — середина сторони BC. Знайдіть кут BAD.

7. Вважають, що учень A вчиться краще за учня B, якщо в більшості контрольних робіт оцінка учня A вища, ніж в учня B. Чи може після написання більше трьох контрольних робіт виявитися, що учень A вчиться краще за учня B, учень B краще за учня C, а учень C краще за A?

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2015/2016 рік. Перший тур

Задачі для 9 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. Вершини правильного 12-кутника пофарбовано в червоний і синій кольори. Відомо, що коли вибрати з цих точок довільні три, які є вершинами правильного трикутника, то принаймні дві з них виявляться пофарбованими в червоний колір. Доведіть, що знайдеться квадрат, принаймні три вершини якого пофарбовано в червоний колір.

2. Натуральне число назвемо *красивим*, якщо воно дорівнює добутку факторіалів простих чисел (не обов'язково різних). Додатне раціональне число назвемо *практичним*, якщо воно дорівнює відношенню двох красивих натуральних чисел. Доведіть, що довільне додатне раціональне число є практичним.

3. У тарганячих гонах беруть участь 27 тарганів. У кожному забігу змагаються три таргани. Швидкості всіх тарганів різні та постійні протягом усіх забігів. Після кожного забігу нам повідомлюють, у якому порядку фінішували його учасники. Нам хотілося б дізнатися, який з тарганів є найшвидшим і який є другим за швидкістю. Чи вистачить для цього 14 забігів?

4. У трикутнику ABC кут B рівний 30°, а кут C рівний 105°. Точка D — середина сторони BC. Знайдіть кут BAD.

5. У Васі є 12 паличок, довжина кожної з яких є натуральним числом, що не перевищує 56. Доведіть, що з якихось трьох паличок можна скласти трикутник.

6. Знайдіть хоча б одне натуральне число, добуток натуральних дільників якого дорівнює 10^{90}.

7. Добре відомо, що $3^2 + 4^2 = 5^2$. Менш відомо, що $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Та чи існує 2015 таких послідовних натуральних чисел, що сума квадратів перших 1008 з них дорівнює сумі квадратів останніх 1007?

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2015/2016 рік. Перший тур

Задачі для 10 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. Багз Банні та Кролик Роджер побилися об заклад, хто з них швидший. Щоб з'ясувати це, вони вирішили провести змагання: кожен має подолати відстань у 50 метрів, потім розгорнутися та повернутися на місце старту. Відомо, що Багз Банні стрибає на 50 см, а Роджер на 60 см, але за той час, за який Багз робить 6 стрибків, Роджер робить 5. Хто з кроликів фінішує першим?

2. Для яких натуральних n можна розрізати квадрат на n подібних прямокутників, принаймні два з яких нерівні?

3. Чи існують такі натуральні числа a і b, що
$$\text{НСК}(a, b) = \text{НСК}(a + 2015, b + 2016)?$$

4. У трикутнику ABC кут B рівний $30°$, а кут C рівний $105°$. Точка D — середина сторони BC. Знайдіть кут BAD.

5. Розставте в клітинках квадрата 10×10 різні натуральні числа так, щоб їхні суми в кожному рядку та кожному стовпчику були однаковими та (за цієї умови) якомога меншими. На одній з діагоналей вже стоять числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 і 2015 (які не можна використовувати вдруге).

6. Вписане коло дотикається сторін AB, BC і AC трикутника ABC у точках C_1, A_1 і B_1 відповідно. Доведіть нерівність
$$\frac{AC}{AB_1} + \frac{CB}{CA_1} + \frac{BA}{BC_1} > 4.$$

7. Добре відомо, що $3^2 + 4^2 = 5^2$. Менш відомо, що $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Та чи для кожного натурального k існує $2k + 1$ таких послідовних натуральних чисел, що сума квадратів перших $k + 1$ з них дорівнює сумі квадратів останніх k?

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2015/2016 рік. Перший тур

Задачі для 11 класу

Будь ласка, не забудьте обґрунтувати відповіді.

1. Багз Банні та Кролик Роджер побилися об заклад, хто з них швидший. Щоб з'ясувати це, вони вирішили провести змагання: кожен має подолати відстань у 50 метрів, потім розгорнутися та повернутися на місце старту. Відомо, що Багз Банні стрибає на 50 см, а Роджер на 60 см, але за той час, за який Багз робить 6 стрибків, Роджер робить 5. Хто з кроликів фінішує першим?

2. Для яких натуральних n можна розрізати квадрат на n подібних прямокутників, принаймні два з яких нерівні?

3. Чи існують такі натуральні числа a і b, що
$$\text{НСК}(a, b) = \text{НСК}(a + 2015, b + 2016)?$$

4. У трикутнику ABC кут B рівний $30°$, а кут C рівний $105°$. Точка D — середина сторони BC. Знайдіть кут BAD.

5. У кожній цілочисельній точці площини росте дерево діаметром 10^{-6}. Лісоруб зрубав дерево, що стояло в точці $(0, 0)$, і став у центр пенька. Чи є обмеженою частина площини, яку він може оглянути? Вважайте кожне дерево нескінченною циліндричною колонною, вісь симетрії якої проходить через цілочисельну точку площини.

6. Наведіть приклад чотирьох додатних чисел, які не можуть бути радіусами чотирьох попарно дотичних сфер.

7. Добре відомо, що $3^2 + 4^2 = 5^2$. Менш відомо, що $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Та чи для кожного натурального k існує $2k + 1$ таких послідовних натуральних чисел, що сума квадратів перших $k + 1$ з них дорівнює сумі квадратів останніх k?