Olimpiada Matemática Internacional
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"
Curso 2015/2016. Fase 1

Problemas del grado R5

No olvides escribir todos los razonamientos.

1. Pedro, Braulio and Antonio reunieron sus ahorros para comprar un balón. Cada uno de ellos no gastaron más de la mitad del dinero gastado por los otros dos chicos juntos. El balón cuesta 9 euros. ¿Cuánto dinero se gastó Pedro?

2. Paulina anotó los números A y B en una pizarra. Victoria los borró y escribió su suma C y su producto D. A continuación, Paulina borró esos nuevos números , reemplanzándolos por su suma E y su producto F. Uno de los números E o F resultó ser impar. ¿Cuál era y por qué?

3. Decimos que un estudiante A estudia *mejor* que un estudiante B si la mayoría de sus puntuaciones del test realizado, son más altas. Después de realizar 3 tests resulta que el estudiante A estudia mejor que el estudiante B, el estudiante B estudia mejor que el estudiante C, y el estudiante C estudia mejor que el estudiante A. ¿Es posible este resultado?

4. Si León obtiene una baja nota en la escuela, se pasa la tarde mintiendo a su madre. De lo contrario, él le dice a ella solo la verdad. León tiene una hermana menor que recibe caramelos cada vez que ella vuelve a casa sin bajas notas. Una tarde, León le dijo a su madre: "Hoy tuve más notas bajas que mi hermana". ¿Su hermana recibirá caramelos o no?

5. Un calendario mágico muestra la fecha correcta los días pares del mes, y una incorrecta, los días impares. ¿Cuál es el máximo número de días consecutivos cuando el calendario podría mostrar la misma fecha? ¿Cuál es el día del mes que podría aparecer entre estos días?

6. ¿Cuántos nímeros hay, de 10 dígitos y con todas sus cifras distintas, que contengan el fragmento 0123?

7. Dibujamos un cuadrado 8×8 en un papel cuadriculado siguiendo las cuadrículas. Alex lo ha dividido en 7 partes de igual perímetro siguiendo las cuadrículas. Muestre una manera en que podría haberlo hecho.

Olimpiada Matemática Internacional
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"

Curso 2015/2016. Fase 1

Problemas del grado R6

No olvides escribir todos los razonamientos.

1. Hay 14 personas sentadas en forma circular. Pedro, Victoria, Antonio y Gustavo están sentados, y cada uno de ellos tiene una moneda de valor 1, 2, 5 y 10, respectivamente. Los demás no tienen dinero. Cualquier persona sentada en el círculo puede pasar una moneda a una persona, a su izquierda o a su derecha, si hay exactamente 3 personas entre ellas. Después de un rato, las monedas regresaron a Pedro, Victoria, Antonio y Gustavo. ¿Qué moneda tiene cada uno de ellos, ahora? Encuentra todas las posibles variantes y demuestra que no hay más posibilidades.

2. Paulina anotó los números A y B en una pizarra. Victoria los borró y escribió su suma C y su producto D. A continuación, Paulina borró esos nuevos números , reemplanzándolos por su suma E y su producto F. Uno de los números E o F resultó ser impar. ¿Cuál era y por qué?

3. Decimos que un estudiante A estudia *mejor* que un estudiante B si la mayoría de sus puntuaciones del test realizado, son más altas. Después de realizar 3 tests resulta que el estudiante A estudia mejor que el estudiante B, el estudiante B estudia mejor que el estudiante C, y el estudiante C estudia mejor que el estudiante A. ¿Es posible este resultado?

4. Si León obtiene una baja nota en la escuela, se pasa la tarde mintiendo a su madre. De lo contrario, él le dice a ella solo la verdad. León tiene una hermana menor que recibe caramelos cada vez que ella vuelve a casa sin bajas notas. Una tarde, León le dijo a su madre: "Hoy tuve más notas bajas que mi hermana". ¿Su hermana recibirá caramelos o no?

5. Un calendario mágico muestra la fecha correcta los días pares del mes, y una incorrecta, los días impares. ¿Cuál es el máximo número de días consecutivos cuando el calendario podría mostrar la misma fecha? ¿Cuál es el día del mes que podría aparecer entre estos días?

6. ¿Cuántos números hay, de 10 dígitos y con todas sus cifras distintas, que contengan el fragmento 0123 o el fragmento 3210?

7. Dibujamos un cuadrado 8×8 en un papel cuadriculado siguiendo las cuadrículas. Alex lo ha dividido en 7 partes de igual perímetro siguiendo las cuadrículas. Muestre una manera en que podría haberlo hecho.

Olimpiada Matemática Internacional
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"

Curso 2015/2016. Fase 1

Problemas del grado R7

No olvides escribir todos los razonamientos.

1. Un calendario mágico muestra la fecha correcta los días pares del mes, y una incorrecta, los días impares. ¿Cuál es el máximo número de días consecutivos cuando el calendario podría mostrar la misma fecha? ¿Qué fecha podría ser?

2. Rellene las celdas de un cuadrado de 5×5, con distintos enteros positivos, de tal manera que las sumas en cada fila y columna sean iguales, y además sean la menor suma posible. Una de las diagonales ya ha sido rellenada con los números 1, 2, 3, 4 y 2015 (ya no puede usarlos otra vez).

3. Dibujamos un cuadrado 8×8 en un papel cuadriculado siguiendo las cuadrículas. Alex lo ha dividido en 7 partes de igual perímetro siguiendo las cuadrículas. Muestre una manera en que podría haberlo hecho.

4. Hay 27 cucarachas participando en carreras de cucarachas. En cada carrera corren 3 cucarachas. Cada cucaracha tiene una velocidad constante, que no cambia entre carreras. Las velocidades de todas las cucarachas son diferentes. Como resultado de cada carrera, obtenemos solamente el orden en que sus participantes han finalizado. Deseamos saber cuáles son las dos cucarachas más veloces (en el orden correcto). ¿Serían suficientes 14 carreras para determinarlo?

5. Decimos que un estudiante A estudia *mejor* que un estudiante B si la mayoría de sus puntuaciones del test realizado, son más altas. Después de realizar más de 3 tests resulta que el estudiante A estudia mejor que el estudiante B, el estudiante B estudia mejor que el estudiante C, y el estudiante C estudia mejor que el estudiante A. ¿Es posible este resultado?

6. Llamamos a un entero positivo *bonito*, si es el producto de factoriales primos (no necesariamente distintos). Llamamos a un entero positivo racional *práctico*, si es el cociente de dos números *bonitos*. Demuestre que todos los números racionales positivos son prácticos. Nota: El factorial del número n es n!=1*2*3*...*n

7. Llamamos a un entero positivo *ascendente*, si la secuencia de sus dígitos es estrictamente ascendente (por ejemplo, 1589 es ascendente, mientras que 447 no lo es). ¿Cuál es el número mínimo de enteros positivos ascendentes, cuya suma es 2015?

Olimpiada Matemática Internacional
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”
Curso 2015/2016. Fase 1
Problemas del grado R8

No olvides escribir todos los razonamientos.

1. Rellene las celdas de un cuadrado de 5×5, con distintos enteros positivos, de tal manera que las sumas en cada fila y columna sean iguales, y además sean la menor suma posible. Una de las diagonales ya ha sido rellenada con los números 1, 2, 3, 4 y 2015 (ya no puede usarlos otra vez).

2. Hay 27 cucarachas participando en carreras de cucarachas. En cada carrera corren 3 cucarachas. Cada cucaracha tiene una velocidad constante, que no cambia entre carreras. Las velocidades de todas las cucarachas son diferentes. Como resultado de cada carrera, obtenemos solamente el orden en que sus participantes han finalizado. Deseamos saber cuáles son las dos cucarachas más veloces (en el orden correcto). ¿Serían suficientes 14 carreras para determinarlo?

3. Encuentre un entero positivo tal que el producto de sus divisores naturales sea 10^{90}.

4. Juan tiene 12 palillos. La longitud de cada palillo es un entero positivo no mayor que 56. Demuestre que Juan tiene tres palillos que podrían formar un triángulo.

5. Llamamos a un entero positivo *bonito*, si es el producto de factoriales primos (no necesariamente distintos). Llamamos a un entero positivo racional *práctico*, si es el cociente de dos números *bonitos*. Demuestre que todos los números racionales positivos son prácticos. Nota: El factorial del número n es n!=1*2*3*...*n

6. En el triángulo $\triangle ABC$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$, y D es el punto medio de BC. Halle la medida de $\angle BAD$.

7. Decimos que un estudiante A estudia *mejor* que un estudiante B si la mayoría de sus puntuaciones del test realizado, son más altas. Después de realizar más de 3 tests resulta que el estudiante A estudia mejor que el estudiante B, el estudiante B estudia mejor que el estudiante C, y el estudiante C estudia mejor que el estudiante A. ¿Es posible este resultado?

Olimpiada Matemática Internacional
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"

Curso 2015/2016. Fase 1

Problemas del grado R9

No olvides escribir todos los razonamientos.

1. Los vértices de un doceágono regular están pintados de azul y rojo. Sabemos que de cada tres vértices que forman un triángulo equilátero, al menos dos son rojos. Demuestre que podemos escoger 4 vértices que formen un cuadrado y que tenga al menos 3 vértices rojos.

2. Llamamos a un entero positivo *bonito*, si es el producto de factoriales primos (no necesariamente distintos). Llamamos a un entero positivo racional *práctico*, si es el cociente de dos números *bonitos*. Demuestre que todos los números racionales positivos son prácticos. Nota: El factorial del número n es n!=1*2*3*...*n

3. Hay 27 cucarachas participando en carreras de cucarachas. En cada carrera corren 3 cucarachas. Cada cucaracha tiene una velocidad constante, que no cambia entre carreras. Las velocidades de todas las cucarachas son diferentes. Como resultado de cada carrera, obtenemos solamente el orden en que sus participantes han finalizado. Deseamos saber cuáles son las dos cucarachas más veloces (en el orden correcto). ¿Serían suficientes 14 carreras para determinarlo?

4. En el triángulo $\triangle ABC$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$, y D es el punto medio de BC. Halle la medida de $\angle BAD$.

5. Juan tiene 12 palillos. La longitud de cada palillo es un entero positivo no mayor que 56. Demuestre que Juan tiene tres palillos que podrían formar un triángulo.

6. Encuentre un entero positivo tal que el producto de sus divisores naturales sea 10^{90}.

7. Es conocido que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Es menos conocido que $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. ¿Existirán 2015 enteros positivos consecutivos, tales que la suma de los cuadrados de los primeros 1008 de ellos, sea igual a la suma de los cuadrados de los restantes 1007?

Olimpiada Matemática Internacional
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"

Curso 2015/2016. Fase 1

Problemas del grado R10

No olvides escribir todos los razonamientos.

1. Bugs Bunny y Roger Rabbit han hecho una apuesta para determinar quién es más rápido. Para determinar el ganador, decidieron realizar una competición. Cada uno de ellos tiene que saltar 50 m en una dirección, después dar la vuelta y saltar en la dirección opuesta. Se sabe que el salto de Bugs es de 50 cm y el de Roger es de 60 cm, pero cuando Bugs da 6 saltos, Roger solo da 5. ¿Quién ganará?

2. ¿Para qué valor de n es posible dividir un cuadrado en n rectángulos semejantes, de tal modo que al menos dos de ellos no sean congruentes?

3. ¿Existen enteros positivos a y b tales que $\text{mcm}(a, b) = \text{mcm}(a + 2015, b + 2016)$? NOTA: mcm significa mínimo común múltiplo.

4. En el triángulo $\triangle ABC$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$, y D es el punto medio de BC. Halle la medida de $\angle BAD$.

5. Rellene las celdas de un cuadrado de 10×10, con distintos enteros positivos, de tal manera que las sumas en cada fila y columna sean iguales, y además sean la menor suma posible. Una de las diagonales ya ha sido rellenada con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 2015 (ya no puede usarlos otra vez).

6. El círculo inscrito de un triángulo $\triangle ABC$ es tangente a AB, BC y AC en los puntos C_1, A_1 yB_1, respectivamente. Demuestre la desigualdad:
$$\frac{AC}{AB_1} + \frac{CB}{CA_1} + \frac{BA}{BC_1} > 4.$$

7. Es conocido que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Es menos conocido que $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. ¿Será cierto que para cualquier natural k existen $2k+1$ naturales consecutivos, tales que la suma de los cuadrados de los primeros $k + 1$de ellos, sea igual a la suma de los cuadrados de los restantes k?

Olimpiada Matemática Internacional
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"

Curso 2015/2016. Fase 1

Problemas del grado R11

No olvides escribir todos los razonamientos.

1. Bugs Bunny y Roger Rabbit han hecho una apuesta para determinar quién es más rápido. Para determinar el ganador, decidieron realizar una competición. Cada uno de ellos tiene que saltar 50 m en una dirección, después dar la vuelta y saltar en la dirección opuesta. Se sabe que el salto de Bugs es de 50 cm y el de Roger es de 60 cm, pero cuando Bugs da 6 saltos, Roger solo da 5. ¿Quién ganará?

2. ¿Para qué valor de n es posible dividir un cuadrado en n rectángulos semejantes, de tal modo que al menos dos de ellos no sean congruentes?

3. ¿Existen enteros positivos a y b tales que $\mathrm{mcm}(a,b) = \mathrm{mcm}(a+2015, b+2016)$? NOTA: mcm significa mínimo común múltiplo.

4. En el triángulo $\triangle ABC$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$, y D es el punto medio de BC. Halle la medida de $\angle BAD$.

5. En cada punto de coordenadas enteras del plano cartesiano está creciendo un árbol de diámetro 10^{-6}. Un leñador cortó el árbol que estaba en el punto (0, 0) y levantó el tronco cortado. ¿Queda limitada la parte del plano visible para él? Considere cada árbol como una columna cilíndrica infinita, cuyo eje contiene al punto de coordenadas enteras del plano.

6. Dé un ejemplo de 4 números positivos que no puedan ser los radios de 4 esferas, tangentes dos a dos.

7. Es conocido que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Es menos conocido que $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. ¿Será cierto que para cualquier natural k existen $2k+1$ naturales consecutivos, tales que la suma de los cuadrados de los primeros $k+1$de ellos, sea igual a la suma de los cuadrados de los restantes k?