International Mathematical Olympiad
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”
Jahr 2015/2016. Runde 1

Aufgaben in Klasse 5

Bitte vergiss nicht, deine Antworten zu beweisen.

1. Peter, Basil und Anatoly haben zusammengelegt, um einen Ball zu kaufen. Es ist bekannt, dass keiner von ihnen mehr als halb so viel ausgegeben hat, wie die anderen beiden Jungen zusammen. Der Ball kostet 9 Euro. Wie viel hat Peter ausgegeben?

2. Pauline hat die Zahlen A und B auf eine Tafel geschrieben. Viktoria hat diese weggewischt und stattdessen die Summe C und das Produkt D der beiden Zahlen angeschrieben. Danach hat Pauline diese neuen Zahlen weggewischt und sie durch ihre Summe E und ihr Produkt F ersetzt. Eine dieser beiden neuen Zahlen war ungerade. Welche und warum?

3. Wir sagen, dass ein Schüler *besser lernt* als ein Anderer, wenn er in mehr als der Hälfte der Tests eine bessere Note bekommt.

   Alexanda, Bruno und Carla haben drei Tests geschrieben. Folgendes ist dabei heraus gekommen: Alexanda lernt besser als Bruno, Bruno lernt besser als Carla, aber Carla lernt besser als Alexandra. Ist so ein Ergebnis möglich?

4. Wenn Leon in der Schule eine schlechte Note bekommt, dann lügt er seine Mutter den ganzen Abend an. Ansonsten sagt er immer die Wahrheit. Leon hat eine kleine Schwester, die immer Süßigkeiten bekommt, wenn sie ohne schlechte Noten nach Hause kommt. Eines Abends erzählt Leon seiner Mutter: „Ich habe heute mehr schlechte Noten bekommen, als meine Schwester.“ Hat seine Schwester an diesem Abend Süßigkeiten bekommen?

5. Ein magischer Kalender zeigt an geraden Tagen (des Monats) ein richtiges Datum und an ungeraden Tagen ein falsches Datum an. An wie vielen aufeinanderfolgenden Tagen kann der Kalender maximal das gleiche Datum anzeigen? Welcher Tag des Monats kann dies sein?

6. Wie viele zehnstellige Zahlen gibt es, in denen keine Ziffer mehrmals verwendet wird und in denen „0123“ vorkommt? (z.B. 8019234576 ist nicht ok.)

7. Alex hat ein Quadrat aus 8×8 Kästchen entlang der Kanten in sieben Teile geschnitten. Alle Teile haben den gleichen Umfang. Gib eine Möglichkeit an, dies zu tun.

International Mathematical Olympiad
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”
Jahr 2015/2016. Runde 1

Aufgaben in Klasse 6

Bitte vergiss nicht, deine Antworten zu beweisen.

1. Vierzehn Kinder sitzen in einem Kreis. Peter, Viktoria, Anatoli und Genghis sitzen in dieser Reihenfolge direkt nebeneinander. Peter hat ein Centstück, Viktoria ein Zweicentstück, Anatoli ein Fünfcentstück und Genghis ein Zehncentstück. Die übrigen Kinder haben keine Münzen. Wer mindestens eine Münze hat, darf sie an ein anderes Kind weitergeben, wenn genau drei andere Kinder dazwischen sitzen. (Wer mehrere Münzen hat, muss sie nicht gemeinsam weiter geben.)

   Nach einer Weile sind alle Münzen wieder bei Peter, Viktoria, Anatoly und Genghis. Wie können die Münzen nun verteilt sein? Finde alle möglichen Verteilungen.

2. Pauline hat die Zahlen A und B auf eine Tafel geschrieben. Viktoria hat diese weggewischt und stattdessen die Summe C und das Produkt D der beiden Zahlen angeschrieben. Danach hat Pauline diese neuen Zahlen weggewischt und sie durch ihre Summe E und ihr Produkt F ersetzt. Eine dieser beiden neuen Zahlen war ungerade. Welche und warum?

3. Wir sagen, dass ein Schüler *besser lernt* als ein Anderer, wenn er in mehr als der Hälfte der Tests eine bessere Note bekommt.

   Alexanda, Bruno und Carla haben drei Tests geschrieben. Folgendes ist dabei heraus gekommen: Alexanda lernt besser als Bruno, Bruno lernt besser als Carla, aber Carla lernt besser als Alexandra. Ist so ein Ergebnis möglich?

4. Wenn Leon in der Schule eine schlechte Note bekommt, dann lügt er seine Mutter den ganzen Abend an. Ansonsten sagt er immer die Wahrheit. Leon hat eine kleine Schwester, die immer Süßigkeiten bekommt, wenn sie ohne schlechte Noten nach Hause kommt. Eines Abends erzählt Leon seiner Mutter: „Ich habe heute mehr schlechte Noten bekommen, als meine Schwester.“ Hat seine Schwester an diesem Abend Süßigkeiten bekommen?

5. Ein magischer Kalender zeigt an geraden Tagen (des Monats) ein richtiges Datum und an ungeraden Tagen ein falsches Datum an. An wie vielen aufeinanderfolgenden Tagen kann der Kalender maximal das gleiche Datum anzeigen? Welcher Tag des Monats kann dies sein?

6. Wie viele zehnstellige Zahlen gibt es, in denen keine Ziffer mehrmals verwendet wird und in denen „0123“ oder „3210“ vorkommt? (z.B. 8019234576 ist nicht ok.)

7. Alex hat ein Quadrat aus 8×8 Kästchen entlang der Kanten in sieben Teile geschnitten. Alle Teile haben den gleichen Umfang. Gib eine Möglichkeit an, dies zu tun.

International Mathematical Olympiad
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"
Jahr 2015/2016. Runde 1

Aufgaben in Klasse 7

Bitte vergiss nicht, deine Antworten zu beweisen.

1. Ein magischer Kalender zeigt an geraden Tagen (des Monats) ein richtiges Datum und an ungeraden Tagen ein falsches Datum an. An wie vielen aufeinanderfolgenden Tagen kann der Kalender maximal das gleiche Datum anzeigen? Welcher Tag des Monats kann dies sein?

2. In einem 5×5 Quadrat stehen auf einer Diagonalen bereits die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 2015. Fülle das Quadrat mit positiven ganzen Zahlen so, dass keine Zahl doppelt vor kommt, die Summe in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich sind, und diese Summe so klein wie möglich ist.

3. Alex hat ein Quadrat aus 8×8 Kästchen entlang der Kanten in sieben Teile geschnitten. Alle Teile haben den gleichen Umfang. Gib eine Möglichkeit an, dies zu tun.

4. Siebenundzwanzig Kakerlaken nehmen an einem Wettrennen teil. An jedem Wettlauf nehmen drei Kakerlaken teil. Jede Kakerlake läuft immer mit einer konstanten Geschwindigkeit, die sich zwischen den Rennen nicht ändert und keine zwei Kakerlaken haben die gleiche Geschwindigkeit. Da wir keine Stoppuhr haben, können wir nur die Reihenfolge der teilnehmenden Kakerlaken feststellen.

   Wir würden gerne die schnellste und die zweitschnellste Kakerlake bestimmen. Reichen dafür 14 Wettläufe aus?

5. Wir sagen, dass ein Schüler *besser lernt* als ein Anderer, wenn er in mehr als der Hälfte der Test eine bessere Note bekommt.

   Es wurden *mindestens* drei Tests geschrieben. Es wurden nur die Noten 2, 3, 4 und 5 vergeben. Folgendes ist dabei heraus gekommen: Alexanda lernt besser als Bruno, Bruno lernt besser als Carla aber Carla lernt besser als Alexandra. Ist so ein Ergebnis möglich?

6. Die Fakultät einer ganzen Zahl n ist das Produkt der Zahlen von 1 bis n. Man schreibt $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$. Ein Produkt von Fakultäten von Primzahlen nennen wir „*schön*". Dabei dürfen Primzahlen auch mehrfach vorkommen. Wenn wir eine schöne Zahl durch eine andere schöne Zahl teilen, dann nennen wir den Bruch „*praktisch*". Zeige, dass alle Brüche praktisch sind.

7. Wir nennen eine ganze Zahl „*aufsteigend*", wenn die Folge ihrer Ziffern strikt wächst. (Zum Beispiel ist 1589 aufsteigend, aber 447 ist nicht aufsteigend.) Wie viele aufsteigende Zahlen benötigt man mindestens, dass die Summe genau 2015 beträgt?

International Mathematical Olympiad
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"
Jahr 2015/2016. Runde 1
Aufgaben in Klasse 8

Bitte vergiss nicht, deine Antworten zu beweisen.

1. In einem 5×5 Quadrat stehen auf einer Diagonalen bereits die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 2015. Fülle das Quadrat mit positiven ganzen Zahlen so, dass keine Zahl doppelt vor kommt, die Summe in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich sind, und diese Summe so klein wie möglich ist.

2. Siebenundzwanzig Kakerlaken nehmen an einem Wettrennen teil. An jedem Wettlauf nehmen drei Kakerlaken teil. Jede Kakerlake läuft immer mit einer konstanten Geschwindigkeit, die sich zwischen den Rennen nicht ändert und keine zwei Kakerlaken haben die gleiche Geschwindigkeit. Da wir keine Stoppuhr haben, können wir nur die Reihenfolge der teilnehmenden Kakerlaken feststellen.

   Wir würden gerne die schnellste und die zweitschnellste Kakerlake bestimmen. Reichen dafür 14 Wettläufe aus?

3. Finde eine natürliche Zahl so, dass das Produkt aller positiven Teiler genau 10^{90} ist.

4. John hat 12 Stäbe. In Zentimeter gemessen hat jeder Stab eine ganzzahlige Länge und kein Stab ist länger als 56 cm. Zeige, dass er drei Stäbe hat, die er zu einem Dreieck zusammenlegen kann.

5. Die Fakultät einer ganzen Zahl n ist das Produkt der Zahlen von 1 bis n. Man schreibt $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Ein Produkt von Fakultäten von Primzahlen nennen wir „*schön*“. Dabei dürfen Primzahlen auch mehrfach vorkommen. Wenn wir eine schöne Zahl durch eine andere schöne Zahl teilen, dann nennen wir den Bruch „*praktisch*“. Zeige, dass alle Brüche praktisch sind.

6. Über das Dreieck $\triangle ABC$ ist folgendes bekannt: Der Winkel bei B beträgt $30°$ und der Winkel bei C beträgt $105°$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ heißt D. Finde den Winkel $\measuredangle BAD$.

7. Wir sagen, dass ein Schüler *besser lernt* als ein Anderer, wenn er in mehr als der Hälfte der Test eine bessere Note bekommt.

   Es wurden *mindestens* drei Tests geschrieben. Es wurden nur die Noten 2, 3, 4 und 5 vergeben. Folgendes ist dabei heraus gekommen: Alexanda lernt besser als Bruno, Bruno lernt besser als Carla aber Carla lernt besser als Alexandra. Ist so ein Ergebnis möglich?

International Mathematical Olympiad
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”
Jahr 2015/2016. Runde 1

Aufgaben in Klasse 9

Bitte vergiss nicht, deine Antworten zu beweisen.

1. Die Eckpunkte eines regelmäßigen Zwölfecks sind blau und rot markiert. Unter je drei Ecken, die ein gleichseitiges Dreieck ergeben, sind mindestens zwei Ecken rot markiert.

   Zeige, dass wir vier Eckpunkte so wählen können so, dass diese ein Quadrat mit mindestens drei roten Ecken bilden.

2. Die Fakultät einer ganzen Zahl n ist das Produkt der Zahlen von 1 bis n. Man schreibt $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$. Ein Produkt von Fakultäten von Primzahlen nennen wir „*schön*“. Dabei dürfen Primzahlen auch mehrfach vorkommen. Wenn wir eine schöne Zahl durch eine andere schöne Zahl teilen, dann nennen wir den Bruch „*praktisch*“. Zeige, dass alle Brüche praktisch sind.

3. Siebenundzwanzig Kakerlaken nehmen an einem Wettrennen teil. An jedem Wettlauf nehmen drei Kakerlaken teil. Jede Kakerlake läuft immer mit einer konstanten Geschwindigkeit, die sich zwischen den Rennen nicht ändert und keine zwei Kakerlaken haben die gleiche Geschwindigkeit. Da wir keine Stoppuhr haben, können wir nur die Reihenfolge der teilnehmenden Kakerlaken feststellen.

   Wir würden gerne die schnellste und die zweitschnellste Kakerlake bestimmen. Reichen dafür 14 Wettläufe aus?

4. Über das Dreieck $\triangle ABC$ ist folgendes bekannt: Der Winkel bei B beträgt $30°$ und der Winkel bei C beträgt $105°$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ heißt D. Finde den Winkel $\measuredangle BAD$.

5. John hat 12 Stäbe. In Zentimeter gemessen hat jeder Stab eine ganzzahlige Länge und kein Stab ist länger als 56 cm. Zeige, dass er drei Stäbe hat, die er zu einem Dreieck zusammenlegen kann.

6. Finde eine natürliche Zahl so, dass das Produkt aller positiven Teiler genau 10^{90} ist.

7. Es ist bekannt, dass für Quadrate die Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$ gilt. Außerdem gilt $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

   Gibt es 2015 aufeinander folgende positive ganze Zahlen, sodass die Summe der Quadrate der ersten 1008 Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten 1007 Zahlen ist?

International Mathematical Olympiad
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"
Jahr 2015/2016. Runde 1

Aufgaben in Klasse 10

Bitte vergiss nicht, deine Antworten zu beweisen.

1. Um herauszufinden, wer am schnellsten ist, machen Bugs Bunny und Roger Rabbit einen Wettbewerb. Jeder von ihnen muss hierbei 50 Meter in eine Richtung hüpfen und wieder zurück. Bugs springt jedesmal nur 50 cm, während Roger 60 cm springt. Bugs schafft aber wiederum sechs Sprünge in der Zeit in der Roger fünf schafft.

   Wer gewinnt den Wettbewerb?

2. Gegeben sei ein Quadrat mit der ganzzahligen Seitenlänge n. Für welche n ist es möglich das Quadrat in n ähnliche Rechtecke zu zerlegen, sodass mindestens zwei hiervon nicht kongruent sind?

3. Untersuche, ob es ganze Zahlen a und b gibt, so dass der kleinste gemeinsame Vielfache der folgenden Gleichung genügt:

   $$kgV(a, b) = kgV(a + 2015, b + 2016)?$$

4. Im Dreieck $\triangle ABC$ sei $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$ und außerdem sei D der Mittelpunkt der Strecke BC. Bestimme den Winkel $\angle BAD$.

5. Gegeben ist ein Quadrat mit 10×10 Feldern. Eine der Diagonalen enthält bereits die Zahlen 1 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 2015.

   Fülle die restlichen Felder des Quadrates nun so mit natürlichen Zahlen, dass alle Zahlen in den Feldern verschieden sind und die Summe in jeder Reihe und jeder Spalte gleich ist. Diese Summe soll unter den gegebenen Bedingungen den kleinstmöglichen Wert annehmen.

6. Der Inkreis eines Dreiecks $\triangle ABC$ berührt AB, BC und AC an den punkten C_1, A_1 beziehungsweise B_1. Zeige die folgende Ungleichung:

   $$\frac{AC}{AB_1} + \frac{CB}{CA_1} + \frac{BA}{BC_1} > 4.$$

7. Es ist bekannt, dass für Quadrate die Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$ gilt. Außerdem gilt $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

   Gibt es für jede natürliche Zahl k nun $2k+1$ aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so, dass die Summe der Quadrate der ersten $k + 1$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der restlichen k Zahlen ist?

International Mathematical Olympiad
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"
Jahr 2015/2016. Runde 1
Aufgaben in Klasse 11

Bitte vergiss nicht, deine Antworten zu beweisen.

1. Um herauszufinden, wer am schnellsten ist, machen Bugs Bunny und Roger Rabbit einen Wettbewerb. Jeder von ihnen muss hierbei 50 Meter in eine Richtung hüpfen und wieder zurück. Bugs springt jedesmal nur 50 cm, während Roger 60 cm springt. Bugs schafft aber wiederum sechs Sprünge in der Zeit in der Roger fünf schafft.

   Wer gewinnt den Wettbewerb?

2. Gegeben sei ein Quadrat mit der ganzzahligen Seitenlänge n. Für welche n ist es möglich das Quadrat in n ähnliche Rechtecke zu zerlegen, sodass mindestens zwei hiervon nicht kongruent sind?

3. Untersuche, ob es ganze Zahlen a und b gibt, so dass der kleinste gemeinsame Vielfache der folgenden Gleichung genügt:
$$kgV(a, b) = kgV(a + 2015, b + 2016)?$$

4. Im Dreieck $\triangle ABC$ sei $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$ und außerdem sei D der Mittelpunkt der Strecke BC. Bestimme den Winkel $\angle BAD$.

5. An jedem Gitterpunkt einer kartesischen Ebene wächst ein Baum mit einem Durchmesser von 10^{-6}. Ein Holzfäller fällt den Baum am Punkt $(0, 0)$ und stellt sich auf den Baumstumpf. Untersuche, ob der für ihn sichtbare Teil der Ebene beschränkt ist.

   Hinweis: Behandle jeden Baum als unendlich hohen Zylinder, der auf einem Gitterpunkt zentriert ist.

6. Gebe beispielhaft vier positive Zahlen so an, dass diese nicht Radien von vier sich paarweise berührenden Kreisen sein können.

7. Es ist bekannt, dass für Quadrate die Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$ gilt. Außerdem gilt $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

   Gibt es für jede natürliche Zahl k nun $2k+1$ aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so, dass die Summe der Quadrate der ersten $k + 1$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der restlichen k Zahlen ist?