საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა

"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"

სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

2015 - 2016 წწ. I ტური

5 კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბუთეთ

1. პეტრემ, ვასიკომ და ლუკამ ერთად იყიდეს ფეხბურთის ბურთი. ცნობილია, რომ თითოეულმა გადაიხადა არაუმეტესი, ვიდრე დანარჩენი ორი ბიჭის გადახდილი თანხის ნახევარი. ბურთი ღირდა 9 ლარი. რამდენი გადაიხადა პეტრემ?

2. სალომემ დაწერა დაფაზე ორი რიცხვი. ელენემ წაშალა ისინი და დაწერა ამ რიცხვების ჯამი და ნამრავლი. სალომემ ისევ წაშალა დაწერილი რიცხვები და ისევ დაწერა ამ რიცხვების ჯამი და ნამრავლი. ბოლო ორ რიცხვ შორის ერთ-ერთი აღმოჩნდა კენტი. რომელი - ჯამი თუ ნამრავლი და რატომ?

3. ითვლება, რომ მოსწავლე A სწავლობს უკეთესად, ვიდრე მოსწავლე B, თუ საკონტროლოების უმეტესობაში A-მ მიიღო უფრო მაღალი ნიშანი, ვიდრე B-მ. კლასში ჩაატარეს 3 საკონტროლო წერა. შესაძლებელია თუ არა, რომ A სწავლობდეს B-ზე უკეთესად, B სწავლობდეს C-ზე უკეთესად, ხოლო C სწავლობდეს A-ზე უკეთესად?

4. საღამოებით ნიკა ატყუებს დედიკოს, თუ იმ დღეს მიიღო 2-ანი, ხოლო ყველა დანარჩენ შემთხვევაში ეუბნება დედიკოს სიმართლეს. მის დას ელენეს დედიკო აძლევს კანფეტს ყოველ იმ დღეს, როდესაც ელენეს არ მიუღია 2-იანი. ერთხელ საღამოს ნიკამ უთხრა დედიკოს: "მე დღეს მივიღე უფრო მეტი 2-იანი, ვიდრე ჩემმა დამ ელენემ". მიიღო თუ არა ელენემ ამ დღეს კანფეტი?

5. ჯადოსნური კალენდარი უჩვენებს სწორ თარიღს თვის ყოველ ლუწ რიცხვში და არასწორ თარიღს თვის ყოველ კენტ რიცხვში. ყველაზე მეტი რამდენი დღე ზედიზედ ამ კალენდარს შეუძლია ერთი და იგივე თარიღის ჩვენება? მიუთითეთ ეს თარიღი (ან რამდენიმე თარიღი).

6. რამდენი არსებობს ისეთი 10-ნიშნა რიცხვი, რომელშიც ყველა ციფრი სხვადასხვაა და ციფრები 0, 1, 2 და 3 წერია მიმდევრობით ზრდადობის მიხედვით.

7. ალექსიმ გაჭრა 8×8 კვადრატი უჯრედების საზღვრებით 7 ნაწილად, რომლებსაც აქვთ ტოლი პერიმეტრი. როგორ მოახერხა მან ეს? (საკმარისია მოიყვანოთ ერთი მაგალითი - დახატეთ რვეულში)

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"
სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
2015 - 2016 წწ. I ტური 6 კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბუთეთ

1. წრეზე ზის 14 ადამიანი. პეტრე, ნიკა, ლუკა და თემური სხედან მიმდევრობით. პეტრეს აქვს 1 ლარი, ნიკას 2 ლარი, ლუკას 5 ლარი და თემურის 10 ლარი. სხვებს ფული არა აქვთ. ნებისმიერს შეუძლია გადასცეს თავისი თანხა სხვას იმ პირობით, რომ მათ შორის ზის ზუსტად 3 ადამიანი. რამდენიმე ასეთი გადაცემის შემდეგ ფული ისევ დაუბრუნდა პეტრეს, ნიკას, ლუკას და თემურის. რომელს რა თანხა აქვს ამჟამად?

2. სალომემ დაწერა დაფაზე ორი რიცხვი. ელენემ წაშალა ისინი და დაწერა ამ რიცხვების ჯამი და ნამრავლი. სალომემ ისევ წაშალა დაწერილი რიცხვები და ისევ დაწერა ამ რიცხვების ჯამი და ნამრავლი. ბოლო ირო რიცხვ შორის ერთ-ერთი აღმოჩნდა კენტი. რომელი - ჯამი თუ ნამრავლი და რატომ?

3. ითვლება, რომ მოსწავლე A სწავლობს უკეთესად, ვიდრე მოსწავლე B, თუ საკონტროლოების უმეტესობაში A-მ მიიღო უფრო მაღალი ნიშანი, ვიდრე B-მ. კლასში ჩაატარეს 3 საკონტროლო წერა. შესაძლებელია თუ არა, რომ A სწავლობდეს B-ზე უკეთესად, B სწავლობდეს C-ზე უკეთესად, ხოლო C სწავლობდეს A-ზე უკეთესად?

4. საღამოებით ნიკა ატყუებს დედიკოს, თუ იმ დღეს მიიღო 2-ანი, ხოლო ყველა დანარჩენ შემთხვევაში ეუბნება დედიკოს სიმართლეს. მის დას ელენეს დედიკო აძლევს კანფეტს ყოველ იმ დღეს, როდესაც ელენეს არ მიუღია 2-იანი. ერთხელ საღამოს ნიკამ უთხრა დედიკოს: "მე დღეს მივიღე უფრო მეტი 2-იანი, ვიდრე ჩემმა დამ ელენემ". მიიღო თუ არა ელენემ ამ დღეს კანფეტი?

5. ჯადოსნური კალენდარი უჩვენებს სწორ თარიღს თვის ყოველ ლუწ რიცხვში და არასწორ თარიღს თვის ყოველ კენტ რიცხვში. ყველაზე მეტი რამდენი დღე ზედიზედ ამ კალენდარს შეუძლია ერთი და იგივე თარიღის ჩვენება? მიუთითეთ ეს თარიღი (ან რამდენიმე თარიღი).

6. რამდენი არსებობს ისეთი 10-ნიშნა რიცხვი, რომელშიც ყველა ციფრი სხვადასხვაა და ციფრები 0, 1, 2 და 3 წერია მიმდევრობით ზრდადობის მიხედვით.

7. ალექსიმ გაჭრა 8×8 კვადრატი უჯრედების საზღვრებით 7 ნაწილად, რომლებსაც აქვთ ტოლი პერიმეტრი. როგორ მოახერხა მან ეს? (საკმარისია მოიყვანოთ ერთი მაგალითი - დახატეთ რვეულში)

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"
სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
2015 - 2016 წწ. I ტური
7კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბუთეთ

1. ჯადოსნური კალენდარი უჩვენებს სწორ თარიღს თვის ყოველ ლუწ რიცხვში და არასწორ თარიღს თვის ყოველ კენტ რიცხვში. ყველაზე მეტი რამდენი დღე ზედიზედ ამ კალენდარს შეუძლია ერთი და იგივე თარიღის ჩვენება? მიუთითეთ ეს თარიღი (ან რამდენიმე თარიღი).

2. 5×5 კვადრატის უჯრებში ჩაწერეთ სხვადასხვა ნატურალური რიცხვები ისე, რომ ყველა სტრიქონსა და ყველა სვეტში რიცხვების ჯამი იყოს ტოლი და თანაც რაც შეიძლება ნაკლები. ერთ-ერთ დიაგონალზე რიცხვები 1, 2, 3, 4 და 2015 უკვე წერია (მათი გამეორება არ შეიძლება).

3. ალექსიმ გაჭრა 8×8 კვადრატი უჯრედების საზღვრებით 7 ნაწილად, რომლებსაც აქვთ ტოლი პერიმეტრი. როგორ მოახერხა მან ეს? (საკმარისია მოიყვანოთ ერთი მაგალითი - დახატეთ რვეულში)

4. დოღში მონაწილეობს 27 ცხენი. თითო გარბენში მონაწილეობს ზუსტად 3 ცხენი. ყველა ცხენის სიჩქარე სხვადასხვაა და თითოეული ცხენის სიჩქარე ნებისმიერ გარბენში ერთნაირია. თითოეული გარბენის შემდეგ ვაფიქსირებთ შედეგს, ანუ ვინ მოვიდა პირველი, მეორე და მესამე. გვინდა გამოვავლინოთ ყველაზე სწრაფი და სისწრაფით მე-2 ცხენები. საკმარისია თუ არა ამისათვის 14 გარბენი?

5. ითვლება, რომ მოსწავლე A სწავლობს უკეთესად, ვიდრე მოსწავლე B, თუ საკონტროლოების უმეტესობაში A-მ მიიღო უფრო მაღალი ნიშანი, ვიდრე B-მ. კლასში ჩაატარეს რამდენიმე (3-ზე მეტი) საკონტროლო წერა. შესაძლებელია თუ არა, რომ A სწავლობდეს B-ზე უკეთესად, B სწავლობდეს C-ზე უკეთესად, ხოლო C სწავლობდეს A-ზე უკეთესად?

6. ნატურალურ რიცხვს ვუწოდოთ ლამაზი, თუ ის ტოლია რომელიღაცა მარტივი რიცხვების ფაქტორიალების ნამრავლს (ეს მარტივი რიცხვები შეიძლება ტოლიც იყოს). დადებით რაციონალურ რიცხვს ვუწოდოთ პრაქტიკული, თუ ის წარმოადგენს ორი ლამაზი რიცხვის შეფარდებას. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი დადებითი რაციონალური რიცხვი პრაქტიკულია.

7. ნატურალურ რიცხვს ვუწოდოთ ზრდადი, თუ ციფრები მასში ჩაწერილია მკაცრი ზრდადობის მიხედვით (მაგ., 1589 ზრდადია, ხოლო 447 არა). ყველაზე ცოტა რამდენი ზრდადი რიცხვი უნდა შევაჯამოთ, რომ მივიღოთ 2015?

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"
სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
2015 - 2016 წწ. I ტური
8 კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბუთეთ

1. 5×5 კვადრატის უჯრებში ჩაწერეთ სხვადასხვა ნატურალური რიცხვები ისე, რომ ყველა სტრიქონსა და ყველა სვეტში რიცხვების ჯამი იყოს ტოლი და თანაც რაც შეიძლება ნაკლები. ერთ-ერთ დიაგონალზე რიცხვები 1, 2, 3, 4 და 2015 უკვე წერია (მათი გამეორება არ შეიძლება).

2. დოღში მონაწილეობს 27 ცხენი. თითო გარბენში მონაწილეობს ზუსტად 3 ცხენი. ყველა ცხენის სიჩქარე სხვადასხვაა და თითოეული ცხენის სიჩქარე ნებისმიერ გარბენში ერთნაირია. თითოეული გარბენის შემდეგ ვაფიქსირებთ შედეგს, ანუ ვინ მოვიდა პირველი, მეორე და მესამე. გვინდა გამოვავლინოთ ყველაზე სწრაფი და სისწრაფით მე-2 ცხენები. საკმარისია თუ არა ამისათვის 14 გარბენი?

3. იპოვეთ ერთი მაინც ისეთი რიცხვი, რომლის ყველა ნატურალური გამყოფის ნამრავლი ტოლია 10^{90}.

4. ვასიკოს აქვს 12 ჩხირი, თითოეულის სიგრძე - ნატურალური რიცხვია, რომელიც არ აღემატება 56-ს. დაამტკიცეთ, რომ რომელიღაცა 3 ჩხირისაგან შესაძლებელია სამკუთხედის აწყობა.

5. ნატურალურ რიცხვს ვუწოდოთ ლამაზი, თუ ის ტოლია რომელიღაცა მარტივი რიცხვების ფაქტორიალების ნამრავლს (ეს მარტივი რიცხვები შეიძლება ტოლიც იყოს). დადებით რაციონალურ რიცხვს ვუწოდოთ პრაქტიკული, თუ ის წარმოადგენს ორი ლამაზი რიცხვის შეფარდებას. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი დადებითი რაციონალური რიცხვი პრაქტიკულია.

6. ABC სამკუთხედში B კუთხე 30^0-ის, ხოლო C კუთხე 105^0-ის ტოლია. D წერტილი BC გვერდის შუაწერტილია. იპოვეთ BAD კუთხე.

7. ითვლება, რომ მოსწავლე A სწავლობს უკეთესად, ვიდრე მოსწავლე B, თუ საკონტროლოების უმეტესობაში A-მ მიიღო უფრო მაღალი ნიშანი, ვიდრე B-მ. კლასში ჩაატარეს რამდენიმე (3-ზე მეტი) საკონტროლო წერა. შესაძლებელია თუ არა, რომ A სწავლობდეს B-ზე უკეთესად, B სწავლობდეს C-ზე უკეთესად, ხოლო C სწავლობდეს A-ზე უკეთესად?

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"
სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
2015 - 2016 წწ.   I ტური
9 კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბუთეთ

1. წესიერი 12-კუთხედის წვეროები შეღებილია წითელ და ლურჯ ფერებში. ცნობილია, რომ თუ ავირჩევთ ნებისმიერ 3 წვეროს, რომლებიც შეადგენენ წესიერ სანკუთხედს, მინიმუმ 2 მაინც იქნება წითლად შეღებილი. დაამტკიცეთ, რომ მოიძებნება კვადრატი, რომლის 3 წვერო მაინც იქნება წითელი.

2. ნატურალურ რიცხვს ვუწოდოთ ლამაზი, თუ ის ტოლია რომელიღაცა მარტივი რიცხვების ფაქტორიალების ნამრავლს (ეს მარტივი რიცხვები შეიძლება ტოლიც იყოს). დადებით რაციონალურ რიცხვს ვუწოდოთ პრაქტიკული, თუ ის წარმოადგენს ორი ლამაზი რიცხვის შეფარდებას. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი დადებითი რაციონალური რიცხვი პრაქტიკულია.

3. დოღში მონაწილეობს 27 ცხენი. თითო გარბენში მონაწილეობს ზუსტად 3 ცხენი. ყველა ცხენის სიჩქარე სხვადასხვაა და თითოეული ცხენის სიჩქარე ნებისმიერ გარბენში ერთნაირია. თითოეული გარბენის შემდეგ ვაფიქსირებთ შედეგს, ანუ ვინ მოვიდა პირველი, მეორე და მესამე. გვინდა გამოვავლინოთ ყველაზე სწრაფი და სისწრაფით მე-2 ცხენები. საკმარისია თუ არა ამისათვის 14 გარბენი?

4. ABC სამკუთხედში B კუთხე 30^0-ის, ხოლო C კუთხე 105^0-ის ტოლია. D წერტილი BC გვერდის შუაწერტილია. იპოვეთ BAD კუთხე.

5. ვასიკოს აქვს 12 ჩხირი, თითოეულის სიგრძე - ნატურალური რიცხვია, რომელიც არ აღემატება 56-ს. დაამტკიცეთ, რომ რომელიღაცა 3 ჩხირისაგან შესაძლებელია სამკუთხედის აწყობა.

6. იპოვეთ ერთი მაინც ისეთი რიცხვი, რომლის ყველა ნატურალური გამყოფის ნამრავლი ტოლია 10^{90}.

7. კარგად ცნობილია, რომ $3^2 + 4^2 = 5^2$. ნაკლებად ცნობილია, რომ $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. ხოლო არსებობს თუ არა 2015 მიმდევრობითი ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ პირველი 1008 რიცხვის კვადრატების ჯამი იყოს ტოლი ბოლო 1007 რიცხვის კვადრატების ჯამის?

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"
სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
2015 - 2016 წწ. I ტური
10 კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბეთეთ

1. ბაჭია და ციკვი დანიძლავდნენ, რომელი უფრო სწრაფად დახტის. ამისათვის აირჩიეს 50-მეტრიანი დისტანცია: ნახტომებით უნდა გაევლოთ ეს დისტანცია, მოტრიალებულიყვნენ და დაბრუნდნენ სტარტის ადგილას. ცნობილია, რომ ბაჭიას ნახტომი 50 სმ-ია, ციკვის - 60 სმ, მაგრამ იმ დროში, რაშიც ბაჭია აკეთებს 6 ნახტომს, ციკვი აკეთებს 5 ნახტომს. რომელი მოიგებს ნიძლავს?

2. როგორი n-თვის შეიძლება გავჭრათ კვადრატი n მსგავს მართკუთხედად ისე, რომ მათ შორის ყველა არ იყოს ტოლი.

3. არსებობს თუ არა ისეთი ნატურალური a და b, რომ

$$\text{უსჯ}\,(a, b) = \text{უსჯ}\,(a + 2015, b + 2016)$$

4. ABC სამკუთხედში B კუთხე 30^0-ის, ხოლო C კუთხე 105^0-ის ტოლია. D წერტილი BC გვერდის შუაწერტილია. იპოვეთ BAD კუთხე.

5. 10×10 კვადრატის უჯრებში ჩაწერეთ სხვადასხვა ნატურალური რიცხვები ისე, რომ ყველა სტრიქონსა და ყველა სვეტში რიცხვების ჯამი იყოს ტოლი და თანაც რაც შეიძლება ნაკლები. ერთ-ერთ დიაგონალზე რიცხვები 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 და 2015 უკვე წერია (მათი გამეორება არ შეიძლება).

6. ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი ეხება AB, BC და AC გვერდებს შესაბამისად C_1, A_1 და B_1 წერტილებში. დაამტკიცეთ უტოლობა:

$$AC / AB_1 + CB / CA_1 + BA / BC_1 > 4$$

7. კარგად ცნობილია, რომ $3^2 + 4^2 = 5^2$. ნაკლებად ცნობილია, რომ $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. ხოლო არსებობს თუ არა ნებისმიერი ნატურალური k რიცხვისათვის 2k+1 მიმდევრობითი ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ პირველი k+1 რიცხვის კვადრატების ჯამი იყოს ტოლი ბოლო k რიცხვის კვადრატების ჯამის?

საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა
"ერთობის ფორმულა" / "მე-3 ათასწლეული"
სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
2015 - 2016 წწ. I ტური
11 კლასი

ყველა ამოცანაში პასუხი დაასაბეთეთ

1. ბაჭია და ციკვი დანიძლავდნენ, რომელი უფრო სწრაფად დახტის. ამისათვის აირჩიეს 50-მეტრიანი დისტანცია: ნახტომებით უნდა გაევლოთ ეს დისტანცია, მოტრიალებულიყვნენ და დაბრუნდნენ სტარტის ადგილას. ცნობილია, რომ ბაჭიას ნახტომი 50 სმ-ია, ციკვის - 60 სმ, მაგრამ იმ დროში, რაშიც ბაჭია აკეთებს 6 ნახტომს, ციკვი აკეთებს 5 ნახტომს. რომელი მოიგებს ნიძლავს?

2. როგორი n-თვის შეიძლება გავჭრათ კვადრატი n მსგავს მართკუთხედად ისე, რომ მათ შორის ყველა არ იყოს ტოლი.

3. არსებობს თუ არა ისეთი ნატურალური a და b, რომ

$$\text{უსჯ}\,(a, b) = \text{უსჯ}\,(a + 2015, b + 2016)$$

4. ABC სამკუთხედში B კუთხე 30^0-ის, ხოლო C კუთხე 105^0-ის ტოლია. D წერტილი BC გვერდის შუაწერტილია. იპოვეთ BAD კუთხე.

5. სიბრტყის ნებისმიერ მთელმნიშვნელიან წერტილში იზრდება ხე დიამეტრით 10^{-6}. მეტყევემ მოჭრა ხე, რომელიც იდგა წერტილში (0; 0) და დადგა მის ადგილას მთლად ცენტრში. შეზღუდულია თუ არა სიბრტყის ის ნაწილი, რომლის დანახვა შეუძლია? ნებისმიერი ხე ჩათვალეთ უსასრული ცილინდრულ ბოძად, რომლის ღერძი გადის სიბრტყის მთელმნიშვნელიან წერტილში.

6. მოიყვანეთ მაგალითი ისეთი 4 დადებითი რიცხვისა, რომლებიც არ შეიძლება იყოს წყვილ-წყვილად შემხები სფეროების რადიუსები.

7. კარგად ცნობილია, რომ $3^2 + 4^2 = 5^2$. ნაკლებად ცნობილია, რომ $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. ხოლო არსებობს თუ არა ნებისმიერი ნატურალური k რიცხვისათვის 2k+1 მიმდევრობითი ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ პირველი k+1 რიცხვის კვადრატების ჯამი იყოს ტოლი ბოლო k რიცხვის კვადრატების ჯამის?