Olympiade Mathématique internationale
“Formule d’Unité” / “Le troisième Millénaire”

Année 2015/2016. Tour 1

Problèmes pour le niveau R5

N’oubliez pas de justifier toutes vos réponses.

1. Peter, Basil et Anatoly ont mis ensemble leurs économies pour s’acheter un ballon. On sait que chacun a contribué pas plus que la moitié de ce que les deux autres ensemble. La balle coute 9 dollars. Combien Peter a-t-il payé ?
2. Pauline a écrit les nombres A et B au tableau. Victoria les a effacés et a écrit leur somme C et leur produit D à la place. Puis Pauline a effacé ces nouveaux nombres et les a remplacé par leur somme E et leur produit F. Il se trouve qu’un de ces deux derniers nombres est impair. Lequel et pourquoi ?
3. On dira que l’élève A étudie mieux que l’élève B si ses notes dans la majorité de contrôles sont meilleures. Après les trois premiers contrôles on a trouvé que A étudie mieux que B, B étudie mieux que C et C étudie mieux que A. Est-ce qu’une telle situation est possible ?
4. Si Léon a des mauvaises notes à l’école, il passe sa journée à mentir à sa maman. Sinon il dit seulement des vérités. Léon a une petite soeur à qui on donne des bonbons à chaque fois qu’elle n’a que des bonnes notes. Un jour Léon dit à sa maman : ”Aujourd’hui j’ai eu plus de mauvaises notes que ma soeur”. Est-ce que sa soeur aura les bonbons ?
5. Un calendrier magique indique la date correcte uniquement pour les jours pairs du mois. Quel est le nombre maximal de jours consécutifs pendant lesquels il pourrait indiquer la même date ? Quel pourrait être le jour du mois affiché ?
6. Combien de nombres à 10 chiffres, tels que leur écriture contient la séquence 0123 et dont tous les chiffres sont distinctes, existe-t-il ?
7. Un carré 8×8 est dessiné sur une feuille quadrillée (les côtés suivent les lignes du quadrillage). Alex l’a découpé en sept parties de même périmètre (en suivant les lignes du quadrillage). Comment aurait-il pu faire ? Un exemple suffira.

Olympiade Mathématique internationale
"Formule d'Unité" / "Le troisième Millénaire"

Année 2015/2016. Tour 1

Problèmes pour le niveau R6

N'oubliez pas de justifier toutes vos réponses.

1. Quatorze enfants sont assis en cercle. Peter, Victoria, Anatoly et Genghis sont assis dans cet ordre, l'un à côté de l'autre. Ils ont une pièce chacun, de valeur 1, 2, 5 et 10 centimes respectivement. Les autres enfants n'ont pas d'argent. A tout moment chaque enfant peut passer une pièce à un autre enfant s'il y a trois enfants qui les séparent. Après un certain temps toutes les pièces sont retournées chez Peter, Victoria, Anatoly et Genghis. Qui a quelle pièce maintenant ? Trouver toutes les réponses possibles et montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

2. Pauline a écrit les nombres A et B au tableau. Victoria les a effacés et a écrit leur somme C et leur produit D à la place. Puis Pauline a effacé ces nouveaux nombres et les a remplacé par leur somme E et leur produit F. Il se trouve qu'un de ces deux derniers nombres est impair. Lequel et pourquoi ?

3. On dira que l'élève A étudie mieux que l'élève B si ses notes dans la majorité de contrôles sont meilleures. Après les trois premiers contrôles on a trouvé que A étudie mieux que B, B étudie mieux que C et C étudie mieux que A. Est-ce qu'une telle situation est possible ?

4. Si Léon a des mauvaises notes à l'école, il passe sa journée à mentir à sa maman. Sinon il dit seulement des vérités. Léon a une petite soeur à qui on donne des bonbons à chaque fois qu'elle n'a que des bonnes notes. Un jour Léon dit à sa maman : "Aujourd'hui j'ai eu plus de mauvaises notes que ma soeur". Est-ce que sa soeur aura les bonbons ?

5. Un calendrier magique indique la date correcte uniquement pour les jours pairs du mois. Quel est le nombre maximal de jours consécutifs pendant lesquels il pourrait indiquer la même date ? Quel pourrait être le jour du mois affiché ?

6. Combien de nombres à 10 chiffres, tels que leur écriture contient la séquence 0123 ou la séquence 3210 et dont tous tous les chiffres sont distinctes, existe-t-il ?

7. Un carré 8×8 est dessiné sur une feuille quadrillée (les côtés suivent les lignes du quadrillage). Alex l'a découpé en sept parties de même périmètre (en suivant les lignes du quadrillage). Comment aurait-il pu faire ? Un exemple suffira.

Olympiade Mathématique internationale
“Formule d’Unité” / “Le troisième Millénaire”
Année 2015/2016. Tour 1
Problèmes pour le niveau R7

N’oubliez pas de justifier toutes vos réponses.

1. Un calendrier magique indique la date correcte uniquement pour les jours pairs du mois. Quel est le nombre maximal de jours consécutifs pendant lesquels il pourrait indiquer la même date ? Quel pourrait être le jour du mois affiché ?
2. Remplir les cellules du tableau 5×5 avec les nombres entiers distincts de sorte que la somme de nombres dans chaque ligne et chaque colonne soit la même et la plus petite possible, sachant que la diagonale est déjà remplie avec les nombre 1,2,3,4 et 2015 (donc vous ne pouvez pas les utiliser ailleurs).
3. Un carré 8×8 est dessiné sur une feuille quadrillée (les côtés suivent les lignes du quadrillage). Alex l’a découpé en sept parties de même périmètre (en suivant les lignes du quadrillage). Comment aurait-il pu faire ? Un exemple suffira.
4. Dans une course de cafards 27 ”coureurs” compètent. À chaque tour participent 3 cafards. On sait que chaque cafard court à une vitesse constante qui ne change pas d’un tour à l’autre et les vitesses de tous les cafards sont différentes. A la fin de chaque tour seul l’ordre d’arrivée est annoncé. Est-ce qu’on peut déterminer les deux plus rapides cafards (dans le bon ordre) avec seulement 14 tours ?
5. On dira que l’élève A étudie mieux que l’élève B si ses notes dans la majorité de contrôles sont meilleures. Après au moins trois contrôles on a trouvé que A étudie mieux que B, B étudie mieux que C et C étudie mieux que A. Est-ce qu’une telle situation est possible ?
6. On dira qu’un entier naturel est *beau* s’il est le produit de factoriels de nombres premiers (non nécessairement distincts). On dira qu’un entier naturel est *pratique* s’il est le quotient de deux beaux nombres. Montrer que tout nombre rationnel positif est pratique.
7. On dira qu’un entier naturel *ascendant* si la suite de ses chiffres est strictement croissante (par exemple 1589 est ascendant, mais 447 ne l’est pas). Quel est le nombre minimal d’entiers ascendants dont la somme vaut 2015 ?

Olympiade Mathématique internationale
“Formule d’Unité” / “Le troisième Millénaire”
Année 2015/2016. Tour 1
Problèmes pour le niveau R8

N’oubliez pas de justifier toutes vos réponses.

1. Remplir les cellules du tableau 5×5 avec les nombres entiers distincts de sorte que la somme de nombres dans chaque ligne et chaque colonne soit la même et la plus petite possible, sachant que la diagonale est déjà remplie avec les nombre 1,2,3,4 et 2015 (donc vous ne pouvez pas les utiliser ailleurs).
2. Dans une course de cafards 27 ”coureurs” compètent. À chaque tour participent 3 cafards. On sait que chaque cafard court à une vitesse constante qui ne change pas d’un tour à l’autre et les vitesses de tous les cafards sont différentes. A la fin de chaque tour seul l’ordre d’arrivée est annoncé. Est-ce qu’on peut déterminer les deux plus rapides cafards (dans le bon ordre) avec seulement 14 tours ?
3. Trouver un entier naturel tel que le produit de tous ses diviseurs positifs est 10^{90}.
4. John a 12 bâtonnets. La longueur de chacun est un nombre entier naturel non nul inférieur ou égal à 56. Montrer qu’il a trois bâtonnets qui peuvent former un triangle.
5. On dira qu’un entier naturel est *beau* s’il est le produit de factoriels de nombres premiers (non nécessairement distincts). On dira qu’un entier naturel est *pratique* s’il est le quotient de deux beaux nombres. Montrer que tout nombre rationnel positif est pratique.
6. Dans le triangle ABC, $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{C} = 105°$ et D est le milieu de $[BC]$. Trouver la mesure de l’angle $\widehat{BAD}$.
7. On dira que l’élève A étudie mieux que l’élève B si ses notes dans la majorité de contrôles sont meilleures. Après au moins trois contrôles on a trouvé que A étudie mieux que B, B étudie mieux que C et C étudie mieux que A. Est-ce qu’une telle situation est possible ?

Olympiade Mathématique internationale
"Formule d'Unité" / "Le troisième Millénaire"

Année 2015/2016. Tour 1

Problèmes pour le niveau R9

N'oubliez pas de justifier toutes vos réponses.

1. Les sommets d'un dodécagone régulier ont été coloriés en rouge et en bleu. On sait que si trois sommets du dodécagone forment un triangle équilatéral alors au moins deux d'entre eux sont rouges. Montrer qu'il est possible de choisir quatre sommets qui forment un carré de sorte que au moins trois d'entre eux soient rouges.
2. On dira qu'un entier naturel est *beau* s'il est le produit de factoriels de nombres premiers (non nécessairement distincts). On dira qu'un entier naturel est *pratique* s'il est le quotient de deux beaux nombres. Montrer que tout nombre rationnel positif est pratique.
3. Dans une course de cafards 27 "coureurs" compètent. À chaque tour participent 3 cafards. On sait que chaque cafard court à une vitesse constante qui ne change pas d'un tour à l'autre et les vitesses de tous les cafards sont différentes. A la fin de chaque tour seul l'ordre d'arrivée est annoncé. Est-ce qu'on peut déterminer les deux plus rapides cafards (dans le bon ordre) avec seulement 14 tours ?
4. Dans le triangle ABC, $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{C} = 105°$ et D est le milieu de $[BC]$. Trouver la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$.
5. John a 12 bâtonnets. La longueur de chacun est un nombre entier naturel non nul inférieur ou égal à 56. Montrer qu'il a trois bâtonnets qui peuvent former un triangle.
6. Trouver un entier naturel tel que le produit de tous ses diviseurs positifs est 10^{90}.
7. Il est bien connu que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Il est moins bien connu que $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Existe-t-il 2015 entiers positifs consécutifs tels que la somme des carrés de 1008 premiers est égale à la somme des carrés de 1007 derniers ?

Olympiade Mathématique internationale
“Formule d'Unité” / “Le troisième Millénaire”
Année 2015/2016. Tour 1
Problèmes pour le niveau R10

N'oubliez pas de justifier toutes vos réponses.

1. Bugs Bunny et Roger Rabbit ont parié sur qui est le plus rapide. Pour déterminer le gagnant ils organisent une compétition : chacun doit sauter 50 m en une direction, puis faire un demi-tour et retourner au point de départ. On sait que chaque saut de Bugs couvre 50 cm et chaque saut de Roger couvre 60 cm, mais Bugs fait fait 6 sauts pendant le temps qu'il faut à Roger pour faire 5 sauts. Qui va gagner ?
2. Pour quel(s) entier(s) naturel(s) est-il possible de diviser un carré en n rectangles semblables (c.à.d. tels que leurs cotés sont proportionnels) de sorte qu'au moins deux d'entre eux soient différents ?
3. Existe-t-il un couple d'entiers positifs a et b tels que $\mathrm{PPCM}(a, b) = \mathrm{PPCM}(a+2015, b+2016)$? Ici PPCM désigne le plus petit commun multiple.
4. Dans le triangle ABC, $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{C} = 105°$ et D est le milieu de $[BC]$. Trouver la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$.
5. Remplir les cellules du tableau 10×10 avec les nombres entiers distincts de sorte que la somme de nombres dans chaque ligne et chaque colonne soit la même et la plus petite possible, sachant que la diagonale est déjà remplie avec les nombre 1,2,3,4,5,6,7,8,9 et 2015 (donc vous ne pouvez pas les utiliser ailleurs).
6. Le cercle inscrit du triangle ABC touche les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ aux points C_1, A_1 et B_1 respectivement. Démontrer l'inégalité suivante :
$$\frac{AC}{AB_1} + \frac{CB}{CA_1} + \frac{BA}{BC_1} > 4.$$
7. Il est bien connu que t $3^2 + 4^2 = 5^2$. Il est moins bien connu que $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Est-il vrai que pour tout entier positif k il existe $2k + 1$ entiers positifs consécutifs tels que la somme de carrés des $k + 1$ premiers est égale à la somme de carreś des k derniers.

Olympiade Mathématique internationale
“Formule d’Unité” / “Le troisième Millénaire”

Année 2015/2016. Tour 1

Problèmes pour le niveau R11

N’oubliez pas de justifier toutes vos réponses.

1. Bugs Bunny et Roger Rabbit ont parié sur qui est le plus rapide. Pour déterminer le gagnant ils organisent une compétition : chacun doit sauter 50 m en une direction, puis faire un demi-tour et retourner au point de départ. On sait que chaque saut de Bugs couvre 50 cm et chaque saut de Roger couvre 60 cm, mais Bugs fait fait 6 sauts pendant le temps qu’il faut à Roger pour faire 5 sauts. Qui va gagner ?
2. Pour quel(s) entier(s) naturel(s) est-il possible de diviser un carré en n rectangles semblables (c.à.d. tels que leurs cotés sont proportionnels) de sorte qu’au moins deux d’entre eux soient différents ?
3. Existe-t-il un couple d’entiers positifs a et b tels que $\mathrm{PPCM}(a, b) = \mathrm{PPCM}(a+2015, b+2016)$? Ici PPCM désigne le plus petit commun multiple.
4. Dans le triangle ABC, $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{C} = 105°$ et D est le milieu de $[BC]$. Trouver la mesure de l’angle $\widehat{BAD}$.
5. Sur chaque point à coordonnées entières du plan cartésien pousse un arbre dont le tronc a le diamètre 10^{-6}. Un bûcheron a coupé l’arbre qui poussait au point $(0; 0)$ et s’est posé sur la souche. Son champs de vision, est-il limité ? Il faut traiter chaque arbre comme un cylindre infini dont l’axe contient un point à coordonnées entières.
6. Donner un exemple de 4 nombres positifs qui ne peuvent pas être les rayons de 4 sphères qui se touchent deux à deux.
7. Il est bien connu que t $3^2 + 4^2 = 5^2$. Il est moins bien connu que $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Est-il vrai que pour tout entier positif k il existe $2k + 1$ entiers positifs consécutifs tels que la somme de carrés des $k + 1$ premiers est égale à la somme de carreś des k derniers.