Year 2015/2016. Round I

Problems for grade R5

Please do not forget to prove your answers.

1. Peter, Basil și Anatoly vor să cumpere împreună o minge. Fiecare dintre ei contribuie cu cel mult o jumătate din suma cu care contribuie ceilalți doi copii împreună. Mingea costă 9 dolari. Cu ce sumă a contribuit Peter?

2. Pauline a scris numerele A și B pe o tablă. Victoria a șters numerele și a scris pe tablă suma lor C și produsul lor D. După aceasta, Pauline a șters aceste noi numere și le-a înlocuit cu suma lor E și produsul lor F. Unul din numerele E și F este par. Care dintre ele și de ce ?

3. Considerăm că elevul A învață *mai bine* decât elevul B dacă punctajele sale în majoritatea testelor pe care le-a susținut sunt mai mari. După 3 teste ar rezulta că elevul A învață *mai bine* decât elevul B, elevul B învață *mai bine* decât elevul C și elevul C învață *mai bine* decât elevul A. Este posibil să avem asemenea rezultate după cele trei teste?

4. Dacă Leon obține o notă mică la școală, el își petrece întreaga seară mințindu-și mama. Altfel, el spune mamei sale doar adevărul. Leon are o surioară care primește bomboane de fiecare dată când vine acasă fără note mici. Într-o seară, Leon i-a spus mamei sale: "Astăzi am obținut mai multe note mici decât surioara mea". Va primi surioara lui bomboane sau nu?

5. Un calendar magic arată data corectă în zilele cu număr par și o dată greșită în zilele cu număr impar. Care este numărul maxim de zile consecutive când se poate arăta aceeași dată? Ce zi a săptămânii poate afișa calendarul în timpul acestor zile?

6. Câte numere de 10 cifre distincte care să conțină secvența 0123 există ?

7. Un pătrat de dimensiuni 8x8 a fost desenat pe o foaie cu pătrățele urmărind liniile rețelei deja existente. Alex a împărțit pătratul în 7 părți având perimetrele egale urmărind liniile rețelei. Arătați modul în care el putea realiza această împărțire . (Un exemplu este suficient.)

Notă: Pentru a evita eventuale probleme legate de traducerea subiectelor, este necesar să se consulte varianta oficială a subiectelor: varianta in limba engleză!

Year 2015/2016. Round I

Problems for grade R6

Please do not forget to prove your answers.

1. 14 persoane sunt așezate în cerc. Peter, Victoria, Anatoly și Genghis stau în șir și fiecare dintre ei are o monedă de 1, 2, 5 și 10 respectiv. Ceilalți copii nu au niciun ban. Orice persoană care stă în cerc poate pasa o monedă unei persoane aflate la dreapta sa sau unei persoane aflate la stânga sa, dacă există exact 3 persoane între acestea. După un timp, monezile se întorc la Peter, Victoria, Anatoly și Genghis. Ce monedă are fiecare dintre ei acum? Găsiți toate variantele posibile și arătați că nu mai există alte posibilități.

2. Pauline a scris numerele *A* și *B* pe o tablă. Victoria a șters numerele și a scris pe tablă suma lor *C* și produdul lor *D.* După aceasta, Pauline a șters aceste noi numere și le-a înlocuit cu suma lor *E* și produsul lor *F.* Unul din numerele *E* și *F* este par. Care dintre ele și de ce ?

3. Considerăm că elevul A învață *mai bine* decât elevul B dacă punctajele sale în majoritatea testelor date sunt mai mari. După 3 teste ar rezulta că elevul A învață *mai bine* decât elevul B, elevul B învață *mai bine* decât elevul C și elevul C învață *mai bine* decât elevul A. Este posibil să avem asemenea rezultate după cele trei teste?

4. Dacă Leon obține o notă mică la școală, el își petrece întreaga seară mințindu-și mama. Altfel, el spune mamei sale doar adevărul. Leon are o surioară care primește bomboane de fiecare dată când vine acasă fără note mici. Într-o seară, Leon i-a spus mamei sale: "Astăzi am obținut mai multe note mici decât surioara mea". Va primi surioara lui bomboane sau nu?

5. Un calendar magic arată data corectă în zilele cu număr par și o dată greșită în zilele cu număr impar. Care este numărul maxim de zile consecutive când se poate arăta aceeași dată? Ce zi a săptămânii poate afișa calendarul în timpul acestor zile?

6. Câte numere de 10 cifre distincte care să conțină secvența 0123 sau secvența 3210 există ?

7. Un pătrat de dimensiuni 8x8 a fost desenat pe o foaie cu pătrățele urmărind liniile rețelei deja existente. Alex a împărțit pătratul în 7 părți având perimetrele egale urmărind liniile rețelei. Arătați modul în care el putea realiza această împărțire . (Un exemplu este suficient.)

Notă: Pentru a evita eventuale probleme legate de traducerea subiectelor, este necesar să se consulte varianta oficială a subiectelor: varianta in limba engleză!

Year 2015/2016. Round I

Problems for grade R7

Please do not forget to prove your answers.

1. Un calendar magic arată data corectă în zilele cu număr par și o dată greșită în zilele cu număr impar. Care este numărul maxim de zile consecutive când se poate arăta aceeași dată? Ce zi a săptămânii poate afișa calendarul în timpul acestor zile?

2. Sî se completeze celulele unui pătrat de dimensiune 5x5 cu numere întregi pozitive și distincte astfel încât suma numerelor pe fiecare linie și pe fiecare coloană să fie aceeași și (în aceste condiții) cea mai mică posibilă. Una dintre diagonale este deja completată cu numerele 1, 2, 3, 4 și 2015 (nu se mai pot utiliza din nou aceste numere).

3. Un pătrat de dimensiuni 8x8 a fost desenat pe o foaie cu pătrățele urmărind liniile rețelei deja existente. Alex a împărțit pătratul în 7 părți având perimetrele egale urmărind liniile rețelei. Arătați modul în care el putea realiza această împărțire . (Un exemplu este suficient.)

4. 27 de gândaci participă la o cursă de gândaci. În fiecare cursă aleargă trei gândaci. Fiecare gândac are viteza sa proprie constantă care nu se modifică de la o cursă la alta. Vitezele tuturor gândacilor sunt diferite. Ca și rezultat al fiecărei curse, noi obținem doar ordinea în care participanții la cursă au terminat cursa. Am dori să știm care sunt primii doi cei mai rapizi participanți (în ordinea corectă). 14 curse ar fi suficiente în acest scop?

5. Considerăm că elevul A învață *mai bine* decât elevul B dacă punctajele sale în majoritatea testelor date sunt mai mari. După 3 teste ar rezulta că elevul A învață *mai bine* decât elevul B, elevul B învață *mai bine* decât elevul C și elevul C învață *mai bine* decât elevul A. Este această situație posibilă?

6. Un număr întreg pozitiv îl vom numi *frumos* dacă este produsul unor factoriale de numere prime (nu neapărat distincte). Un număr rațional pozitiv îl vom numi *practic* dacă el este raportul a două numere *frumoase*. Arătați că toate numerele raționale pozitive sunt *practice*.

7. Un număr întreg pozitiv îl vom numi *ascendent* dacă șirul cifrelor sale este strict crescător (de exemplu, 1589 este *ascendent* iar 447 nu este). Care este numărul minim de numere întregi pozitive *ascendente* cu suma 2015?

Notă: Pentru a evita eventuale probleme legate de traducerea subiectelor, este necesar să se consulte varianta oficială a subiectelor: varianta in limba engleză!

Year 2015/2016. Round I

Problems for grade R8

Please do not forget to prove your answers.

1. Să se completeze celulele unui pătrat de dimensiune 5x5 cu numere întregi pozitive distincte astfel încât suma numerelor pe fiecare linie și pe fiecare coloană să fie aceeași și (în aceste condiții) cea mai mică posibilă. Una dintre diagonale este deja completată cu numerele 1, 2, 3, 4 și 2015 (nu se mai pot utiliza din nou aceste numere).

2. 27 de gândaci participă la o cursă de gândaci. În fiecare cursă aleargă trei gândaci. Fiecare gândac are viteza sa proprie constantă care nu se modifică de la o cursă la alta. Vitezele tuturor gândacilor sunt diferite. Ca și rezultat al fiecărei curse, noi obținem doar ordinea în care participanții la cursă au terminat cursa. Am dori să știm care sunt primii doi cei mai rapizi participanți (în ordinea corectă). 14 curse ar fi suficiente în acest scop?

3. Determinați un număr întreg pozitiv astfel încât produsul divizorilor săi întregi și pozitivi să fie egal cu 10^{90} .

4. John are 12 bețișoare, lungimea fiecărui bețișor fiind un număr întreg pozitiv nu mai mare decât 56. Arătați că el are trei bețișoare cu care poate forma un triunghi.

5. Un număr întreg pozitiv îl vom numi *frumos* dacă este produsul unor factoriale de numere prime (nu neapărat distincte). Un număr rațional pozitiv îl vom numi *practic* dacă el este raportul a două numere *frumoase*. Arătați că toate numerele raționale pozitive sunt *practice*.

6. În triunghiul ABC, $m(\measuredangle B)=30^0$, $m(\measuredangle C)=105^0$, iar D este mijlocul segmentului (BC). Determinați $m(\measuredangle BAD)$.

7. Considerăm că elevul A învață *mai bine* decât elevul B dacă punctajele sale în majoritatea testelor date sunt mai mari. După 3 teste ar rezulta că elevul A învață *mai bine* decât elevul B, elevul B învață *mai bine* decât elevul C și elevul C învață *mai bine* decât elevul A. Este această situație posibilă?

Notă: Pentru a evita eventuale probleme legate de traducerea subiectelor, este necesar să se consulte varianta oficială a subiectelor: varianta in limba engleză!

Year 2015/2016. Round I

Problems for grade R9

Please do not forget to prove your answers.

1. Vârfurile unui dodecagon regulat sunt colorate cu albastru sau roșu. Știm că printre oricare 3 vârfuri care formează un triunghi echilateral se află cel puțin 2 vârfuri roșii. Demonstrați că putem alege 4 vârfuri care formează un pătrat cu cel puțin 3 vârfuri roșii.

2. Un număr întreg pozitiv îl vom numi *frumos* dacă este produsul unor factoriale de numere prime (nu neapărat distincte). Un număr rațional pozitiv îl vom numi *practic* dacă el este raportul a două numere *frumoase*. Arătați că toate numerele raționale pozitive sunt *practice*.

3. 27 de gândaci participă la o cursă de gândaci. În fiecare cursă aleargă trei gândaci. Fiecare gândac are viteza sa proprie constantă care nu se modifică de la o cursă la alta. Vitezele tuturor gândacilor sunt diferite. Ca și rezultat al fiecărei curse, noi obținem doar ordinea în care participanții la cursă au terminat cursa. Am dori să știm care sunt primii doi cei mai rapizi participanți (în ordinea corectă). 14 curse ar fi suficiente în acest scop?

4. În triunghiul *ABC*, $m(\measuredangle B)=30^0$, $m(\measuredangle C)=105^0$, iar *D* este mijlocul segmentului (BC). Determinați $m(\measuredangle BAD)$.

5. John are 12 bețișoare, lungimea fiecărui bețișor fiind un număr întreg pozitiv nu mai mare decât 56. Arătați că el are trei bețișoare cu care poate forma un triunghi.

6. Determinați un număr întreg pozitiv astfel încât produsul divizorilor săi întregi și pozitivi să fie egal cu 10^{90} .

7. Este binecunoscut faptul că $3^2+4^2=5^2$. Este mai puțin cunoscut că $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$. Există 2015 numere întregi pozitive și consecutive astfel încât suma pătratelor primelor 1008 numere să fie egală cu suma pătratelor celor 1007 numere rămase?

Notă: Pentru a evita eventuale probleme legate de traducerea subiectelor, este necesar să se consulte varianta oficială a subiectelor: varianta in limba engleză!

Year 2015/2016. Round I

Problems for grade R10

Please do not forget to prove your answers.

1. Bugs Bunny și Roger Rabbit au făcut un pariu referitor la care din ei este mai rapid. Pentru a stabili învingătorul ei au hotărât să organizeze o competiție. Fiecare din ei trebuie să sară 50 de metri într-o direcție, apoi să se întoarcă și să sară înapoi. Este cunoscut faptul că săritura lui Bugs este de 50 cm lungime iar săritura lui Roger este de 60 cm lungime și că Bugs face 6 sărituri în timpul în care Roger face 5 sărituri. Cine va câștiga cursa?

2. Pentru care număr natural n este posibil să se împartă un pătrat în n dreptunghiuri asemenea astfel încât cel puțin două dintre ele să fie necongruente?

3. Există numerele întregi a și b astfel încât $[a,b]=[a+2015,b+2016]$?

   (Notația $[x,y]$ desemnează cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y).

4. În triunghiul ABC, $m(\measuredangle B)=30^0$, $m(\measuredangle C)=105^0$, iar D este mijlocul segmentului (BC). Determinați $m(\measuredangle BAD)$.

5. Să se completeze celulele unui pătrat de dimensiune 10x10 cu numere întregi pozitive distincte astfel încât suma numerelor pe fiecare linie și pe fiecare coloană să fie aceeași și (în aceste condiții) cea mai mică posibilă. Una dintre diagonale este deja completată cu numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 și 2015 (nu se mai pot utiliza din nou aceste numere).

6. Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent dreptelor AB, BC și AC în punctele C_1, A_1 și B_1 respectiv. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{AC}{AB_1}+\frac{CB}{CA_1}+\frac{BA}{BC_1}>4.$$

7. Este binecunoscut faptul că $3^2+4^2=5^2$. Este mai puțin cunoscut că $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$. Există adevărat că pentru orice număr întreg pozitiv k există $2k+1$ numere întregi pozitive și consecutive astfel încât suma pătratelor primelor $k+1$ numere să fie egală cu suma pătratelor celor k numere rămase?

 Notă: Pentru a evita eventuale probleme legate de traducerea subiectelor, este necesar să se consulte varianta oficială a subiectelor: varianta in limba engleză!

Year 2015/2016. Round I

Problems for grade R11

Please do not forget to prove your answers.

1. Bugs Bunny și Roger Rabbit au făcut un pariu referitor la care din ei este mai rapid. Pentru a stabili învingătorul ei au hotărât să organizeze o competiție. Fiecare din ei trebuie să sară 50 de metri într-o direcție, apoi să se întoarcă și să sară înapoi. Este cunoscut faptul că săritura lui Bugs este de 50 cm lungime iar săritura lui Roger este de 60 cm lungime și că Bugs face 6 sărituri în timpul în care Roger face 5 sărituri. Cine va câștiga cursa?

2. Pentru care număr natural n este posibil să se împartă un pătrat în n dreptunghiuri asemenea astfel încât cel puțin două dintre ele să fie necongruente?

3. Există numerele întregi a și b astfel încât $[a,b]=[a+2015,b+2016]$?
   (Notația $[x,y]$ desemnează cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y) .

4. În triunghiul ABC, $m(\measuredangle B)=30^0$, $m(\measuredangle C)=105^0$, iar D este mijlocul segmentului (BC).
   Determinați $m(\measuredangle BAD)$.

5. În fiecare punct de coordonate întregi din planul cartezian crește un copac având diametrul de 10^{-6} . Un tăietor de lemne taie copacul în punctul de coordonate $(0,0)$ și se așează pe butuc. Este o parte a planului pe care el o poate vedea mărginită? Considerați fiecare copac ca fiind o coloană cilindrică infinită cu axa conținând un punct de coordonate întregi.

6. Dați un exemplu de 4 numere pozitive care nu pot fi lungimile razelor a patru sfere tangente două câte două .

7. Este binecunoscut faptul că $3^2+4^2=5^2$. Este mai puțin cunoscut că $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$. Există adevărat că pentru orice număr întreg k există $2k+1$ numere întregi pozitive și consecutive astfel încât suma pătratelor primelor $k+1$ numere să fie egală cu suma pătratelor celor k numere rămase?

Notă: Pentru a evita eventuale probleme legate de traducerea subiectelor, este necesar să se consulte varianta oficială a subiectelor: varianta in limba engleză!