FORMULO DE INTEGRECO 2014 – 2015

El primera ronda

Grado R5

¡Por favor, NO TE OLVIDES DE JUSTIFICAR TUS RESPUESTAS!

1.- Llamamos a un mes "duro", si contiene 5 lunes. ¿Cuántos meses "duros" puede haber en un año?

2.- Multiplicando dos números consecutivos, Andrés obtiene un número de dos cifras que consiste de dos dígitos consecutivos. Halla todos los números que cumplen estas condiciones.

3.- Álex y Ben juegan durante su clase de historia. En la página 25 del libro de texto de historia, Álex tachó todas las palabras que no contenían la letra A, luego tachó todas las palabras que no tenían la letra B y, finalmente, tachó todas las palabras que contenían ambas letras, O y A. En la misma página de su libro de texto, Ben tachó todas las palabras que no tenían letra B, pero tenían la A o la O (o ambas), y luego tachó todas las palabras que no tenían ni A ni O. ¿Es posible que Ben tachara más palabras que Álex?

4.- Hay dos cursos con 30 estudiantes en cada uno de ellos. El número de chicos en el primer curso es el doble que en el segundo, mientras que el número de chicas en el primer curso es la tercera parte que en el segundo. ¿Cuántos chicos y chicas hay en cada curso?

5.- Tres bolígrafos, cuatro lápices y una regla cuestan 26 dólares. Cinco bolígrafos, seis lápices y tres reglas cuestan 44 dólares. ¿Cuánto costaría comprar dos bolígrafos y tres lápices?

6.- Inicialmente el número 1 es escrito en la pizarra. En cada paso, sólo una de las siguientes operaciones es permitida: (1) multiplicar el número por 3, o (2) reacomodar los dígitos del número que esté en la pizarra. ¿Es posible obtener 999, como resultado de estas operaciones?

Grado R6

¡Por favor, NO TE OLVIDES DE JUSTIFICAR TUS RESPUESTAS!

1.- Llamamos a un mes “duro”, si contiene 5 lunes. ¿Cuántos meses “duros” puede haber en un año?

2.- Multiplicando dos números consecutivos, Andrés obtiene un número de dos cifras que consiste de dos dígitos consecutivos. Halla todos los números que cumplen estas condiciones.

3.- Álex y Ben juegan durante su clase de historia. En la página 25 del libro de texto de historia, Álex tachó todas las palabras que no contenían la letra A, luego tachó todas las palabras que no tenían la letra B y, finalmente, tachó todas las palabras que contenían ambas letras, O y A. En la misma página de su libro de texto, Ben tachó todas las palabras que no tenían letra B, pero tenían la A o la O (o ambas), y luego tachó todas las palabras que no tenían ni A ni O. ¿Es posible que Ben tachara más palabras que Álex?

4.- Hay dos cursos con 30 estudiantes en cada uno de ellos. El número de chicos en el primer curso es el doble que en el segundo, mientras que el número de chicas en el primer curso es la tercera parte que en el segundo. ¿Cuántos chicos y chicas hay en cada curso?

5.- Tres bolígrafos, cuatro lápices y una regla cuestan 26 dólares. Cinco bolígrafos, seis lápices y tres reglas cuestan 44 dólares. ¿Cuánto costaría comprar dos bolígrafos y tres lápices?

6.- Inicialmente el número 1 es escrito en la pizarra. En cada paso, sólo una de las siguientes operaciones es permitida: (1) multiplicar el número por 3, o (2) reacomodar los dígitos del número que esté en la pizarra. ¿Es posible obtener 209, como resultado de estas operaciones?

Grado R7

¡Por favor, NO TE OLVIDES DE JUSTIFICAR TUS RESPUESTAS!

1.- Llamamos a un mes “duro”, si contiene 5 lunes. ¿Cuántos meses “duros” puede haber en un año?

2.- Multiplicando dos números consecutivos, Andrés obtiene un número de dos cifras que consiste de dos dígitos consecutivos. Halla todos los números que cumplen estas condiciones.

3.- La suma de tres enteros positivos es 100. ¿Cuál es el máximo valor posible que puede tomar el mínimo común múltiplo de estos números?

4.- Demuestra que, cualquiera que sea la forma que coloquemos los números 1, 2, …, 10 alrededor de un círculo, siempre habrá 3 números adyacentes tales que su suma será mayor o igual a 18.

5.- Tres bolígrafos, cuatro lápices y una regla cuestan 26 dólares. Cinco bolígrafos, seis lápices y tres reglas cuestan 44 dólares. ¿Cuánto costaría comprar dos bolígrafos y tres lápices?

6.- Halla el menor número natural que comience con 11, termine en 11 y sea divisible para 7. Demuestra que el número es, en realidad, el más pequeño.

Grado R8

1.- Demuestra que, para cualquier n > 3, hay un n-ágono tal que ninguna de sus diagonales es paralela.

2.- BK es una bisectriz del triángulo ABC. Sabiendo que AB = AC y BC = AK + BK, halla los ángulos del triángulo.

3.- Tres obreros A, B y C, cavan una zanja. Cada uno de ellos, trabajando solos, pueden cavar la zanja en una cantidad entera de días. Si todos ellos cavan juntos, les toma 2 días menos que si solamente B y C caven, o 5 días menos que si solamente A y C caven, o 10 días menos que si solamente A y B caven. ¿Cuántos días le toma, al obrero más lento y trabajando solo, cavar la zanja?

4.- Hay 15 números compuestos y ninguno de ellos mayor que 2014. Demuestra que existen dos de ellos que tienen un común divisor mayor que 1.

5.- La casilla esquinera de un tablero cuadriculado de 100 x 100 es cortada. ¿Es posible dividir esta figura en 33 partes de igual perímetro e igual área? Sólo está permitido cortar las casillas a los largo de sus lados.

6.- En la mitad de cierto número de 6 cifras insertamos un signo de multiplicación. El producto de estos dos números de 3 cifras es la séptima parte del número original. ¿Cuál es este número?

7.- En un lado, de cada una de N^2 tarjetas, está escrito un número. Todos los números son diferentes. Las tarjetas son acomodadas en un cuadrado de N x N, con los lados en blanco hacia arriba, de modo que no podemos saber los números. Está permitido voltear cualquier tarjeta. Demuestra que siempre es posible encontrar un número menor que los números de las tarjetas adyacentes, usando no más de 8N volteos. (Llamamos a dos números, adyacentes, si sus tarjetas tienen un lado en común.)

8.- Llamamos a un entero positivo, “ascendente”, si cada uno de sus dígitos es mayor que el anterior. Por ejemplo, 7 y 3579 son “ascendentes”, pero 2447, no. ¿Cuál es la mínima cantidad de números “ascendentes” que necesitamos sumar para obtener 2014?

9.- Resuelve la ecuación $2^a - 2^b - 2^{b+c}$ = 2014, en los enteros positivos.

10.- Los ángulos B y C de un triángulo ABC son iguales a 30° y 105°, y P es el punto medio de BC. ¿Cuál es la medida de $< BAP$?

Grado R9

1.- Demuestra que, para cualquier n > 3, hay un n-ágono tal que ninguna de sus diagonales es paralela.

2.- La suma de tres enteros positivos es 100. ¿Cuál es el máximo valor posible que puede tomar su mínimo común múltiplo?

3.- Tres obreros A, B y C, cavan una zanja. Cada uno de ellos, trabajando solos, pueden cavar la zanja en una cantidad entera de días. Si todos ellos cavan juntos, les toma 2 días menos que si solamente B y C caven, o 5 días menos que si solamente A y C caven, o 10 días menos que si solamente A y B caven. ¿Cuántos días le toma, al obrero más lento y trabajando solo, cavar la zanja?

4.- Andrés halló el producto de dos números enteros positivos consecutivos, y lo escribió en algún sistema de numeración. El resultado consistió en dos dígitos consecutivos (que, obviamente, no son mayores que 9). Halla estos dígitos.

5.- La casilla esquinera de un tablero cuadriculado de 100 x 100 es cortada. ¿Es posible dividir esta figura en 33 partes de igual perímetro e igual área? Sólo está permitido cortar las casillas a los largo de sus lados.

6.- Resuelve la ecuación $2^a - 2^b - 2^{b+c}$ = 2014, en los enteros positivos.

7.- En algunas casillas de un tablero de 30 x 30, Ana colocó 162 signos más y 144 signos menos (algunas casillas quedaron vacías), pero no más de 17 signos en cada fila o columna. Por cada signo más, Ben cuenta cuántos signos menos hay en la misma fila, mientras que por cada signo menos, Ben cuenta cuántos signos más hay en la misma columna. ¿Cuál es la máxima suma total de todos los números de Ben?

8.- En un triángulo ABC, hay un punto D sobre el lado AB tal que <ACD = <ABC. Sea S el circuncentro de ΔBCD, y P el punto medio de BD. Demuestra que los puntos, A, C, S y P son concíclicos, es decir, que están sobre una misma circunferencia.

9.- En los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$, se cumple que:

sen A = cos A_1, sen B = cos B_1, sen C = cos C_1.

Halla todos los posibles valores del mayor de estos seis ángulos.

10.- Un punto H dentro de un triángulo ABC es tal que <HAB = <HCB y <HBC = <HAC. Demuestra que H es el ortocentro de ΔABC.

Grado R10

1.- Elige un punto de cada lado de un cuadrado, de tal modo que el perímetro del cuadrilátero que tenga estos vértices, sea mínimo.

2.- Tres obreros A, B y C, cavan una zanja. Cada uno de ellos, trabajando solos, pueden cavar la zanja en una cantidad entera de días. Si todos ellos cavan juntos, les toma 2 días menos que si solamente B y C caven, o 5 días menos que si solamente A y C caven, o 10 días menos que si solamente A y B caven. ¿Cuántos días le toma, al obrero más lento y trabajando solo, cavar la zanja?

3.- Andrés halló el producto de dos números enteros positivos consecutivos, y lo escribió en algún sistema de numeración. El resultado consistió en dos dígitos consecutivos (que, obviamente, no son mayores que 9). Halla estos dígitos.

4.- Hay una progresión aritmética cuya diferencia común es 2061. Demuestra que, entre sus 30 términos sucesivos, no hay más de 20 cuadrados perfectos.

5.- Hay dos números reales, x y y tales que: $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leq 0$. Demuestra que $x \geq -\frac{1}{6}$.

6.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en los números enteros:

$2^a + 3^b = 5^b$,

$3^a + 6^b = 9^b$

7.- María pinta las casillas de un tablero blanco de 10 x 10. Ella escoge algunas columnas y algunas filas, y pinta las columnas de azul mientras que las filas las pinta de rojo. Si una casilla roja es repintada de azul, se convierte en azul, pero si una casilla azul es repintada de rojo, la pintura "reacciona", la casilla pierde su color y se convierte en blanca. ¿Es posible que María obtenga un tablero con exactamente 33 casillas rojas? (Ninguna fila o columna es repintada más de una vez).

8.- En un triángulo ABC, hay un punto D sobre el lado AB tal que <ACD = <ABC. Sea S el circuncentro de ΔBCD, y P el punto medio de BD. Demuestra que los puntos, A, C, S y P son concíclicos, es decir, que están sobre una misma circunferencia.

9.- En los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$, se cumple que:

sen A = cos A_1, sen B = cos B_1, sen C = cos C_1.

Halla todos los posibles valores del mayor de estos seis ángulos.

10.- Resuelve la ecuación en los números primos: $100q + 80 = p^3 + q^2$

Grado R11

1.- Tres obreros A, B y C, cavan una zanja. Cada uno de ellos, trabajando solos, pueden cavar la zanja en una cantidad entera de días. Si todos ellos cavan juntos, les toma 2 días menos que si solamente B y C caven, o 5 días menos que si solamente A y C caven, o 10 días menos que si solamente A y B caven. ¿Cuántos días le toma, al obrero más lento y trabajando solo, cavar la zanja?

2.- Andrés halló el producto de dos números enteros positivos consecutivos, y lo escribió en algún sistema de numeración. El resultado consistió en dos dígitos consecutivos (que, obviamente, no son mayores que 9). Halla estos dígitos.

3.- Hay una progresión aritmética cuya diferencia común es 2061. Demuestra que, entre sus 30 términos sucesivos, no hay más de 20 cuadrados perfectos.

4.- Hay dos números reales, x y y tales que: $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leq 0$. Demuestra que $x \geq -\frac{1}{6}$.

5.- María pinta las casillas de un tablero blanco de 10 x 10. Ella escoge algunas columnas y algunas filas, y pinta las columnas de azul mientras que las filas las pinta de rojo. Si una casilla roja es repintada de azul, se convierte en azul, pero si una casilla azul es repintada de rojo, la pintura "reacciona", la casilla pierde su color y se convierte en blanca. ¿Es posible que María obtenga un tablero con exactamente 33 casillas rojas? (Ninguna fila o columna es repintada más de una vez).

6.- ¿Es siempre cierto que $log_{\sqrt{a}}$ (a + 1) + $log_{a+1}\sqrt{a} \geq \sqrt{6}$, si $a > 1$?

7.- Demuestra que la cantidad de formas para dividir un rectángulo de 200 x 3 en dominós (rectángulos de 1 x 2 o 2 x 1) es divisible para 3.

8.- Tres números son escogidos aleatoriamente de los números 1, …, N y se colocan en orden ascendente. Cabe que dos o tres de estos números puedan ser iguales. Halla la probabilidad de que formen una progresión aritmética.

9.- En los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$, se cumple que:

sen A = cos A_1,   sen B = cos B_1,   sen C = cos C_1.

Halla todos los posibles valores del mayor de estos seis ángulos.

10.- Denotamos el número de divisores de k por d(k) y la función "mayor entero no superior a x" como $\lfloor x \rfloor$. Demuestra que los números d(1) + d(2) + … +d(n) y $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ tienen la misma paridad.