Olimpiada internacional de matemáticas
“Fórmula de la Unidad” / “Tercer milenio”
2013/2014

La primera ronda, grado R5

1. Un año vamos a denominarlo malo, si en la escritura de su número hay dígitos iguales. Por ejemplo, todos los años desde 1988 hasta 2012 fueron malos. ¿Cuál es la cantidad máxima de años malos consecutivos entre los años ya pasados de nuestra era (después de Cristo)?

2. En un pastel redondo hay 6 velas. El pastel lo cortaron en partes con tres cortes, y en cada parte resultó exactamente una vela. ¿Cuántas velas pudieron estar en cada uno de las partes que se formaron después del primer corte? Explicar por qué no es posible ninguna otra variante.

3. Dados tres números positivos impares p, q, r. Sobre ellos se sabe que $p > 2q$, $q > 2r$, $r > p - 2q$. Demostrar que $p + q + r \geq 25$.

4. Kostia tiene seis dados, cada cara de cada dado está pintada de uno de seis colores. Todos los dados están pintados igual. De los dados Kostia ha hecho una columna y la mira desde los cuatro lados. ¿Puede Kostia hacerlo de tal manera que desde cada lado todas las seis caras sean de un color diferente?

5. En un edificio de apartamentos se ha censado a la población. Resultó que en cada apartamento vive una familia conyugal (padre y madre) y en cada familia hay al menos un hijo o una hija. Cada niño del edificio tiene una hermana, pero en total hay más niños que niñas. A su vez, hay menos niños y niñas que adultos. Demostrar que en los resultados del censo se ha colado un error.

6. Un ilusionista quiere barajar un mazo de 36 naipes de tal manera que en dos cualesquiera naipes consecutivos coincida o el valor o el palo. Además, quiere empezar con la dama de picas y terminar con el as de diamantes. ¿Cómo hacerlo?

Olimpiada internacional de matemáticas
"Fórmula de la Unidad" / "Tercer milenio"
2013/2014

La primera ronda, grado R6

1. Un año vamos a denominarlo malo, si en la escritura de su número hay dígitos iguales. Por ejemplo, todos los años desde 1988 hasta 2012 fueron malos. ¿Cuál es la cantidad máxima de años malos consecutivos entre los años ya pasados de nuestra era (después de Cristo)?

2. En un pastel redondo hay 7 velas. El pastel lo cortaron en partes con tres cortes, y en cada parte resultó exactamente una vela. ¿Cuántas partes hubo después del segundo corte y cuántas velas había en cada parte?

3. Dados tres números positivos impares p, q, r. Sobre ellos se sabe que $p > 2q$, $q > 2r$, $r > p - 2q$. Demostrar que $p + q + r \geq 25$.

4. Kostia tiene seis dados, cada cara de cada dado está pintada de uno de seis colores. Todos los dados están pintados igual. De los dados Kostia ha hecho una columna y la mira desde los cuatro lados. ¿Puede Kostia hacerlo de tal manera que desde cada lado todas las seis caras sean de un color diferente?

5. En un edificio de apartamentos se ha censado a la población. Resultó que en cada apartamento vive una familia conyugal (padre y madre) y en cada familia hay al menos un hijo o una hija. Cada niño del edificio tiene una hermana, pero en total hay más niños que niñas. A su vez, hay menos niños y niñas que adultos. Demostrar que en los resultados del censo se ha colado un error.

6. Se venden 20 libros cuyos precios varían de 7 a 10 y 20 forros desde 10 céntimos hasta 1 euro, además todos los precios son diferentes. ¿Pueden Tom y Leopold siempre comprar cada uno un libro con forro pagando el mismo importe?

Olimpiada internacional de matemáticas
“Fórmula de la Unidad” / “Tercer milenio”
2013/2014

La primera ronda, grado R7

1. En una baraja hay naipes iguales en los cuales están escritos los números del 1 al 9. Bill cogió un naipe y secretamente marcó en él 4 números. Mark puede hacer lo mismo con varios naipes. Luego abren los naipes. Si en uno de los naipes de Mark al menos dos de los cuatro números marcados coinciden con los números de Bill, entonces Mark gana. ¿Cuál es la cantidad mínima de naipes que debe tomar Mark y cómo debe rellenarlas, para seguramente ganar?

2. En un pastel redondo hay 10 velas. El pastel lo cortaron en partes con cuatro cortes, y en cada parte resultó exactamente una vela. ¿Cuántas velas pudieron estar en cada uno de las partes que se formaron después del primer corte? Explicar por qué no es posible ninguna otra variante.

3. Un ilusionista tiene dos juegos de 7 naipes. En los naipes rosados están anotados los números enteros del 0 al 6. En el primer naipe azul pone el 1, y el número en cada siguiente naipe azul es 7 veces mayor que el anterior. El ilusionista coloca los naipes en pares (uno rosado con uno azul). Luego los espectadores multiplican los números en cada par y hallan la suma de todos los 7 productos. El truco consiste en que en la suma debe obtenerse un número primo. Sugerir al ilusionista qué naipes se pueden juntar en pares para esta finalidad (o demostrar que el ilusionista no logrará nada).

4. Kostia tiene seis dados, cada cara de cada dado está pintada de uno de seis colores. Todos los dados están pintados igual. De los dados Kostia ha hecho una columna y la mira desde los cuatro lados. ¿Puede Kostia hacerlo de tal manera que desde cada lado todas las seis caras sean de un color diferente?

5. Los números del 1 al 77 han sido escritos en círculo en algún orden. ¿Cuál es la mínima suma posible de los módulos de las diferencias entre los números adyacentes?

6. Se venden 20 libros cuyos precios varían de 7 a 10 y 20 forros desde 10 céntimos hasta 1 euro, además todos los precios son diferentes. ¿Pueden Tom y Leopold siempre comprar cada uno un libro con forro pagando el mismo importe?

Olimpiada internacional de matemáticas
“Fórmula de la Unidad” / “Tercer milenio”
2013/2014

La primera ronda, grado R8

1. En una baraja hay naipes iguales en los cuales están escritos los números del 1 al 12. Bill cogió un naipe y secretamente marcó en él 4 números. Mark puede hacer lo mismo con varios naipes. Luego abren los naipes. Si en uno de los naipes de Mark al menos dos de los cuatro números marcados coinciden con los números de Bill, entonces Mark gana. ¿Cuál es la cantidad mínima de naipes que debe tomar Mark y cómo debe rellenarlas, para seguramente ganar?

2. Dado un rectángulo $ABCD$. En el rayo DC se traza el segmento DK, igual a BD. El punto M es el centro del segmento BK. Demostrar que AM es la bisectriz del ángulo BAC.

3. Un ilusionista tiene dos juegos de 8 naipes. En los naipes rosados están anotados los números enteros del 0 al 7. En el primer naipe azul pone el 1, y el número en cada siguiente naipe azul es 8 veces mayor que el anterior. El ilusionista coloca los naipes en pares (uno rosado con uno azul). Luego los espectadores multiplican los números en cada par y hallan la suma de todos los 8 productos. El truco consiste en que en la suma debe obtenerse un número primo. Sugerir al ilusionista qué naipes se pueden juntar en pares para esta finalidad (o demostrar que el ilusionista no logrará nada).

4. En un plano se han dibujado 5 puntos rojos. Todos los centros de los segmentos entre los puntos los han marcado con azul. Situar los puntos rojos de tal manera que la cantidad de puntos azules sea la mínima posible. (Un punto puede resultar rojo o azul simultáneamente.)

5. Los números del 1 al 88 han sido escritos en círculo en algún orden. ¿Cuál es la mínima suma posible de los módulos de las diferencias entre los números adyacentes?

6. Se venden 20 libros cuyos precios varían de 7 a 10 y 20 forros desde 10 céntimos hasta 1 euro, además todos los precios son diferentes. ¿Pueden Tom y Leopold siempre comprar cada uno un libro con forro pagando el mismo importe?

Olimpiada internacional de matemáticas
"Fórmula de la Unidad" / "Tercer milenio"
2013/2014

La primera ronda, grado R9

1. En una baraja hay naipes iguales en los cuales están escritos los números del 1 al 33. Bill cogió un naipe y secretamente marcó en él 10 números. Mark puede hacer lo mismo con varios naipes. Luego abren los naipes. Si en uno de los naipes de Mark al menos tres de los diez números marcados coinciden con los números de Bill, entonces Mark gana. ¿Cuál es la cantidad mínima de naipes que debe tomar Mark y cómo debe rellenarlas, para seguramente ganar?

2. Dado un rectángulo $ABCD$. En el rayo DC se traza el segmento DK, igual a BD. El punto M es el centro del segmento BK. Demostrar que AM es la bisectriz del ángulo BAC.

3. La base de un sistema de numeración la llamaremos confortable, si existe un número primo cuya notación en este sistema de numeración contiene exactamente una vez cada uno de sus dígitos. Por ejemplo, el 3 es una base confortable, ya que el número ternario 102 es primo. Hallar todas las bases confortables no mayores que 10.

4. En un plano se han dibujado 5 puntos rojos, de tal manera que al tomar tres puntos cualesquiera no estén en una misma recta. Todos los centros de los segmentos entre los puntos los han marcado con azul. Situar los puntos rojos de tal manera que la cantidad de puntos azules sea la mínima posible.

5. Los números del 1 al 99 han sido escritos en círculo en algún orden. ¿Cuál es la mínima suma posible de los módulos de las diferencias entre los números adyacentes?

6. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$$

Olimpiada internacional de matemáticas
"Fórmula de la Unidad" / "Tercer milenio"
2013/2014

La primera ronda, grado R10

1. Un año vamos a denominarlo malo, si en la escritura de su número hay dígitos iguales. Por ejemplo, todos los años desde 1988 hasta 2012 fueron malos. Demostrar que en cada siglo, a partir del 21, hay al menos 44 años malos.

2. Se denomina acimut un ángulo desde $0°$ hasta $360°$, calculado en sentido horario desde la dirección al norte hasta la dirección al punto de orientación necesario. Álex ve una torre de TV con $60°$ de acimut, una torre de agua con $90°$ de acimut y un campanario con $120°$ de acimut. Para Boris los mismos acimuts son iguales a $270°$, $240°$ y a X respectivamente. ¿Qué valores puede tomar X?

3. La base de un sistema de numeración la llamaremos confortable, si existe un número primo cuya notación en este sistema de numeración contiene exactamente una vez cada uno de sus dígitos. Por ejemplo, el 3 es una base confortable, ya que el número ternario 102 es primo. Hallar todas las bases confortables no mayores que 12.

4. Kostia tiene n dados iguales. En dos caras opuestas de cada dado están escritos los números 5 y 6, y en las demás caras los números 1, 2, 3 y 4 (precisamente en este orden en círculo). Kostia hizo una columna pegando estos dados –un paralelepípedo $1 \times 1 \times n$ – y pintó con laca todas las seis caras de la columna. Luego despegó los dados y notó que la suma de los números en las caras pintadas con laca era menor que en el resto de caras. ¿Cuál es el mínimo n para que eso ocurriera?

5. El segmento CH es la altura del triángulo ABC, y el punto O es el centro del círculo circunscrito. Desde el punto C se trazó una perpendicular al segmento AO, y su base fue denominada con la letra T. Finalmente, M es el punto de intersección entre los segmentos HT y BC. Hallar la razón de la longitud de los segmentos BM y CM.

6. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$$

Olimpiada internacional de matemáticas
"Fórmula de la Unidad" / "Tercer milenio"
2013/2014

La primera ronda, grado R11

1. Un año vamos a denominarlo malo, si en la escritura de su número hay dígitos iguales. Por ejemplo, todos los años desde 1988 hasta 2012 fueron malos. Demostrar que en cada siglo, a partir del 21, hay al menos 44 años malos.

2. Para el mundo submarino se ha instalado una barra con un ángulo de $45°$ con respecto a la superficie del agua a una profundidad de 100 metros. Un buzo está atado a la barra con un cable elástico que le permite alejarse de cualquier punto de la barra a una distancia no mayor de 10 metros. Considerando nulas (puntuales) las dimensiones del buzo, encontrar el volumen de la parte del mundo submarino que está a su alcance. Dar la respuesta exacta y redondearla hasta el valor entero más cercano en metros cúbicos.

3. La base de un sistema de numeración la llamaremos confortable, si existe un número primo cuya notación en este sistema de numeración contiene exactamente una vez cada uno de sus dígitos. Por ejemplo, el 3 es una base confortable, ya que el número ternario 102 es primo. Hallar todas las bases confortables.

4. Kostia tiene n dados iguales. En dos caras opuestas de cada dado están escritos los números 5 y 6, y en las demás caras los números 1, 2, 3 y 4 (precisamente en este orden en círculo). Kostia hizo una columna pegando estos dados –un paralelepípedo $1 \times 1 \times n$ – y pintó con laca todas las seis caras de la columna. Luego despegó los dados y notó que la suma de los números en las caras pintadas con laca era menor que en el resto de caras. ¿Cuál es el mínimo n para que eso ocurriera?

5. El segmento CH es la altura del triángulo ABC, y el punto O es el centro del círculo circunscrito. Desde el punto C se trazó una perpendicular al segmento AO, y su base fue denominada con la letra T. Finalmente, M es el punto de intersección entre los segmentos HT y BC. Hallar la razón de la longitud de los segmentos BM y CM.

6. Sean $p_1, ..., p_n$ diferentes números primos. Sea S la suma de todos los productos posibles de una cantidad par (> 0) de diferentes números primos de esta agrupación. Demostrar que $S + 1$ es divisible entre 2^{n-2}.