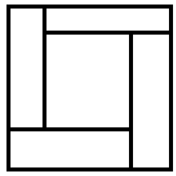
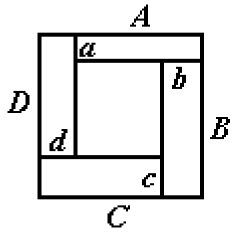
Международная олимпиада «Формула Единства».
Решения задач второго тура для 7–8 классов



7.1. На рисунке изображён квадрат, разбитый на прямоугольники. Докажите, что если площади четырёх «угловых» прямоугольников равны, то «центральный» — квадрат.

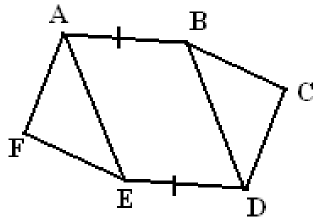


Решение. Пусть сторона большого квадрата x, а угловые прямоугольники имеют стороны a и A, b и B и т.д. Докажем, что угловые прямоугольники равны. Поскольку у них совпадают площади (то есть $Aa=Bb=Cc=Dd$), то достаточно доказать, что $a=b=c=d$. Пусть это не так; например, пусть $a<b$. Тогда $A>B$ из равенства площадей. Но тогда $d<a$, поскольку $d=x–A$, $a=x–B$. Значит, если $a<b$, то $d<a$, поэтому аналогично имеем $c<d$, $b<c$ — противоречие.

Можно сформулировать это рассуждение немного иначе. Назовём длинами прямоугольников числа A, B, C, D, а ширинами — a, b, c, d. Поскольку площади прямоугольников одинаковы, то чем меньше длина, тем больше ширина. Пусть, например, A — наибольшая из длин прямоугольников (т.е. все остальные длины меньше или равны A); тогда (поскольку площади равны) a — наименьшая из ширин; но тогда B — наибольшая из длин, поскольку дополняет a до стороны квадрата. Таким же образом получим, что C и D — тоже наибольшие длины, т.е. все длины наибольшие. Это возможно, только если все длины равны.

Дальнейшее ясно: горизонтальная сторона внутреннего прямоугольника равна $A−b$, а вертикальная — $B−c$; но поскольку $A=B$, а $b=c$, то эти числа равны.

8.1. В шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны параллельны, и к тому же $AB=DE$. Докажите, что $BC=EF$, а $CD=FA$.



Решение. $ABDE$ — параллелограмм, поскольку его стороны равны и параллельны. Значит, BD и EA также параллельны и равны. Поскольку угол между прямыми не меняется при замене их на параллельные им прямые, то угол между FE и AE равен углу между CB и DB, то есть $\angle FEA=\angle CBD$; аналогично $\angle FAE=\angle CDB$. Кроме того, $BD=EA$, поэтому треугольники EFA и BCD равны по второму признаку. Значит, равны и их стороны, ч.т.д.

Примечание. Довольно многие решения использовали то, что три диагонали этого шестиугольника пересекаются в одной точке. Это действительно так: поскольку $ABDE$ — параллелограмм, то его диагонали делятся точкой пересечения пополам, то есть BE проходит через середину AD; далее, из доказанного следует, что и $ACDF$ — параллелограмм, поэтому отрезок CF тоже проходит через середину AD. В то же время во всех таких решения этот факт не был доказан (ведь он «сложнее, чем сама задача»), поэтому верными эти решения признать нельзя.

2. Ежедневно Андрей спускается в метро по эскалатору. Если он сбегает на одну ступень в секунду, то спускается за 96 секунд, а если на две ступени в секунду, то за 60 секунд. За какое время спустится Андрей, если будет стоять неподвижно?

Решение. Пусть человек, стоящий на эскалаторе неподвижно, спускается на k ступеней в секунду (то есть k ступеней в секунду — собственная скорость эскалатора). Тогда в первом случае за 96 секунд Андрей преодолел высоту в $96(k+1)$ ступеней, а во втором — в $60(k+2)$ ступеней. Эти высоты одинаковы; получаем: $96k+96=60k+120$, т.е. $36k=24$, $k=2/3$. Итак, скорость спуска самого эскалатора равна $2/3$ ступени в секунду. Поскольку его высота

$96(k+1)=96\cdot 5/3=160$ ступеней, то Андрей преодолеет их за $160/(2/3)=240$ секунд.
Ответ: 240 секунд, или 4 минуты.

3. У марсиан есть голова, спина, рука, нога и хвост. Каждая из этих частей тела может быть красной, жёлтой, зелёной или синей. Однажды компания марсиан собралась и обнаружила, что у каждого из них хотя бы одна из перечисленных частей тела уникальна (то есть окрашена в цвет, в который эта часть тела не окрашена больше ни у кого из компании). Какова максимально возможная численность компании?

Решение. Заметим, что голова может быть уникальной не более чем у четырёх из собравшихся марсиан, поскольку цветов всего четыре. При этом если она уникальна у четверых, то больше никого в компании быть не может, т.к. все цвета головы уже заняты.
Поэтому если в компании больше четырёх марсиан, то голова уникальна максимум у троих; то же верно для остальных частей тела. Значит, количество марсиан не больше чем $3\cdot 5=15$.
Это количество достигается. Например, пусть у всех марсиан всё будет красное, за исключением того, что у первого жёлтая голова, у второго зелёная голова, у третьего синяя голова; у четвёртого жёлтая спина, у пятого зелёная спина, у шестого синяя спина; ...; у 13-го жёлтый хвост, у 14-го зелёный хвост, у 15-го синий хвост.
Ответ: 15.

Примечание. Для получения полного балла необходимо было привести как оценку количества марсиан (т.е. доказательство того, что их не может быть больше 15), так и пример, доказывающий, что такая компания из 15 марсиан существует.

4. Сколько из чисел от 1 до 2013 делятся на 5 и при этом имеют сумму цифр, кратную 5?

Решение. Покажем, что в каждой сотне (например, от 0 до 99, от 100 до 199 и т.д. — то есть среди чисел $100x$, $100x+1$, ..., $100x+99$) ровно 4 подходящих числа. Заметим, что последняя цифра должна равняться 5 или 0. Далее, в последовательности чисел $100x+5$, $100x+15$, $100x+25$, …, $100x+95$ сумма цифр возрастает на 1; поскольку их десять, то сумма цифр делится на 5 ровно у двух из них. То же верно и для чисел $100x$, $100x+10$, $100x+20$, …, $100x+90$. Всего получаем ровно четыре числа в сотне.
В диапазоне от 0 до 1999 помещается ровно 20 сотен; в каждой сотне по 4 подходящих числа, кроме первой сотни, в которой одно из чисел (ноль) не относится к числам от 1 до 2013. Итого среди чисел от 1 до 1999 подходящих $20\cdot 4-1=79$. Среди чисел 2000, 2005, 2010 подходящих нет.
Ответ: 79 чисел.

Примечание. В полном решении утверждение о том, что в каждой сотне по 4 подходящих числа должно быть не только сформулировано, но и доказано.
Возможны другие решения (например, перебор всевозможных чисел с суммой цифр 5, потом 10, потом 15 и т.д.). Решение в котором все подходящие числа просто перечислены, не является полным, поскольку неочевидно, что других подходящих чисел нет.

7.5. На столе стоят десять коробок, в одной из них 550 конфет, в другой 450, остальные пусты. За один ход разрешается выбрать любые две коробки и переложить часть конфет из одной в другую так, чтобы в этих коробках стало поровну конфет (если число конфет получается дробным, то такая операция запрещена). Можно ли с помощью таких ходов добиться того, чтобы в двух коробках было по 200 конфет, а в остальных по 75?

Решение. Так сделать можно. Например (порядок следования коробок в разных строчках может различаться):

550	0	450	0	0	0	0	0	0	0
275	(275	225)	225	0	0	0	0	0	0
275	225	(250	250)	0	0	0	0	0	0
[275]	225	250	[125]	125	0	0	0	0	0
[200]	[200]	250	{225	125}	0	0	0	0	0
200	200	125	125	{175	175}	0	0	0	0

Осталось научиться из 125, 175, 0, 0 делать 75, 75, 75, 75:
125, 175, 0, 0 → 150, 150, 0, 0 <=> 150, 0, 150, 0 → 75, 75, 75, 75.

8.5. Коле подарили набор из шести палочек, причём все палочки имеют разную длину. Коля сложил из них два подобных треугольника (при этом он использовал каждую палочку в качестве стороны одного из треугольников). Тут к нему подошла Даша и сложила из тех же палочек два других треугольника, которые тоже оказались подобны между собой. Приведите пример такого набора палочек (то есть укажите длину каждой палочки).

Решение. Например, 1, q, q^2, q^3, q^4, q^5, где $q=1{,}1$. Тогда треугольник (1, q, q^2) подобен треугольнику (q^3, q^4, q^5) с коэффициентом q^3, а треугольник (1, q^2, q^4) подобен треугольнику (q, q^3, q^5) с коэффициентом q. При этом неравенство треугольника всюду выполняется: $1{,}1^2>1+1{,}1$, $1{,}1^4>1{,}1+1{,}1^2$ и т.д. Про такие числа говорят, что они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q (последовательность, в которой каждое следующее число в q раз больше предыдущего).