

First International Mathematical Olympiad “Formulo de Integreco”

PROBLEMAS PARA GRUPO SENIOR. GRADES 9–10. (4º ESO – 1º BACH)

1. Un chico multiplicó un número de cinco dígitos por la suma de estas cinco cifras. A continuación, realizó la misma operación con el resultado que obtuvo, es decir, multiplicó éste por la suma de sus cifras.
Sorprendentemente, el resultado del segundo producto fue un número de 5 dígitos también. ¿Qué número multiplicó este chico la primera vez? (Encuentra todas las soluciones posibles)
2. En un cuadrado 7×7 pintamos las celdas de colores rojo, amarillo o verde. Cada celda puede ser pintada de cualquiera de los 3 colores.
Demuestra que existe una fila, una columna y un color tales que exista al menos 3 celdas de este color en esta fila y 3 celdas de este mismo color al menos en esta columna.
3. ¿De cuántas formas distintas podemos escribir una serie de n letras "A" y n letras "B" de tal manera que no contenga el fragmento ABB (en este orden exactamente)?
4. En un triángulo acutángulo ABC , el ángulo C es de 45 grados. Designamos por $A A'$ y BB' las alturas del triángulo desde A y B respectivamente (A' y B' son los pies de dichas alturas).
Demuestra que $A' B' = \sqrt{(A'B^2 + A'C^2) / 2}$
5. Colocamos 100 números alrededor de una circunferencia. Cada uno de los números son iguales a 2, 5 ó 9, teniendo en cuenta que si 2 números son adyacentes, entonces son diferentes.
Agrupamos los números en 50 parejas de números adyacentes. Multiplicamos dichas parejas de números y anotamos los 50 productos. A continuación, agrupamos los mismos 100 números en las otras 50 parejas de números adyacentes. Una vez más, multiplicamos las parejas de números y anotamos los nuevos 50 productos.
Demuestra que la suma de los números resultados de los productos, son iguales. (Es decir, el resultado es independiente de la forma elegida para formar las parejas de números adyacentes)
6. Sean n y k enteros positivos tal que $k^2 + n^2 - k$ es divisible por kn . Demuestra que k es un cuadrado perfecto.